



D. BÉLIÈRES

Caractérisation des erreurs relatives à la numérisation d'un signal alternatif

Characterisation of errors relatives to the digitising of an alternate signal

Denis BÉLIÈRES

Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE), 29 Avenue Roger Hennequin, 78197 Trappes Cedex, France, denis.belieres@lne.fr.

Résumé

La valeur efficace d'un signal se mesure en moyennant son carré sur une durée infinie, et de même une puissance se mesure en moyennant le produit de deux signaux (tension et courant). Ces calculs de carrés, produits et moyennes sont très aisés lorsque le ou les signaux ont été numérisés, mais cette numérisation apporte trois sources d'erreurs distinctes : troncature, échantillonnage et quantification. Ces trois sources d'erreur sont étudiées indépendamment les unes des autres, ainsi que les méthodes pour les réduire et notamment l'usage d'une fenêtre de pondération. Avec ce « fenêtrage », une étude statistique de l'effet simultané de ces trois sources d'erreur a été conduite en simulation sur un très grand nombre de valeurs des paramètres, et des formules sont présentées qui relient l'écart type à la résolution et au nombre d'échantillon.

MOTS CLÉS : NUMÉRISATION, TRONCATURE, ÉCHANTILLONNAGE, QUANTIFICATION, FENÊTRAGE.

Abstract

The RMS value of a signal is measured by averaging its squared value over an infinite duration, and similarly a power is measured by averaging the product of two signals (voltage and current). These computations of square, product and average are very easy when the signal has been digitised, but this digitisation carries three distinct sources of errors: truncation, sampling and quantification. These three error sources are studied independently of each others, as well as methods for reducing them, especially the use of a weighting window. With this "windowing", a statistical study of the simultaneous effect of these three error sources has been made by simulation with a very large number of parameters values, and formulas are presented, which link the standard deviation to the resolution and the number of samples.

KEY WORDS: DIGITISING, TRONCATION, SAMPLING, QUANTIFICATION, WINDOWING.

1. Introduction

Les instruments de mesure d'aujourd'hui sont en grande partie basés sur des techniques numériques, et la simple mesure des tensions ou courants efficaces ainsi que des puissances en courant alternatif n'y échappe pas.

La valeur efficace d'un signal se mesure en moyennant son carré sur une durée infinie et une puissance se mesure en moyennant le produit de deux signaux (tension et courant). Les calculs de ce carré ou produit et de cette moyenne se fait aisément sur les suites de nombres qui représentent le ou les signaux numérisés, mais cette numérisation apporte trois sources d'erreurs distinctes.

- Si la durée d'observation n'est pas infinie, la « troncature » apporte une erreur quand le signal n'est pas périodique ou quand la durée n'est pas un multiple de la demi-période dans les cas simples ou même de la période dans le cas général ; et cette erreur dépend de la phase du signal dans la fenêtre d'observation.
- « L'échantillonnage » du signal implique que le calcul de la moyenne ne se fait pas par intégration continue mais par une somme discrète d'un nombre fini « d'échantillons ».
- La « quantification » est une distorsion du signal dont la valeur instantanée est à tout moment arrondie à un multiple de la « résolution », et l'erreur apportée est très dépendante à la fois du nombre d'échantillons, de la phase et d'une éventuelle composante continue.

Les travaux présentés dans cet article s'inscrivent dans des études menées au sein de l'équipe de métrologie

électrique du LNE dans le but de rendre inutile toute synchronisation dans l'acquisition des mesures de puissance en basse fréquence.

2. La troncature

Soit un signal alternatif sinusoïdal $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$. Sa valeur efficace, soit $1/\sqrt{2}$, doit être calculée en moyennant le carré de la fonction sur un nombre entier de demi-périodes et, s'il s'ajoute une composante continue, sur un nombre entier de périodes.

Nous allons étudier l'erreur commise lorsque ce nombre n n'est pas entier, et la réduction de cette erreur par l'usage d'une fenêtre de pondération.

2.1. Calcul de l'erreur

2.1.1. Expression mathématique

Soient $T = 2\pi/\omega$ la période du signal et $0 \leq t \leq xT$ l'intervalle d'intégration. La valeur efficace du signal est calculée ainsi :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{xT} \int_0^{xT} \sin^2(\omega t + \varphi) \cdot dt. \quad (1)$$

Ce qui s'écrit (calcul détaillé en Annexe A1) :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right]. \quad (2)$$

L'erreur relative ε commise sur cette valeur efficace est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, \varphi) &= \sqrt{2V^2(x, \varphi) - 1} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x}} - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour x demi-entier ou entier ($x = N/2$), on a bien : $V^2(N/2, \varphi) = 1/2$, valeur indépendante de φ : l'erreur est donc toujours nulle.

Cette fonction est représentée en figure 1 pour différentes valeurs de φ .

L'erreur relative passe par des extremums pour des valeurs de x très proches de $N/2 + 1/4$ (N entier). Ce sont des maximums positifs pour $\varphi = +\pi/4$ ou des minimums négatifs pour $\varphi = -\pi/4$. Bien évidemment, l'erreur tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

2.1.2. Maximums et minimums

Les deux angles $2\pi x + 2\varphi$ et 2φ étant indépendants, on peut encadrer la fonction d'erreur comme suit :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2\pi x}} - 1 \leq \varepsilon(x, \varphi) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi x}} - 1. \quad (4)$$

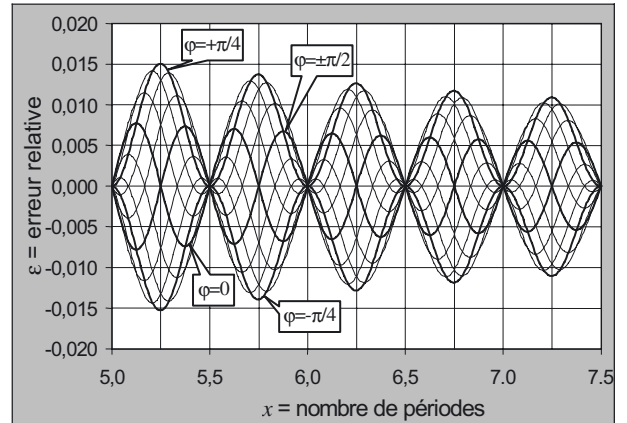


Fig. 1. – Erreur de troncature.

Et si $2\pi x \gg 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}(x) &= \sqrt{1 - \frac{1}{2\pi x}} - 1 \approx \frac{-1}{4\pi x} \\ \varepsilon_{\max}(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi x}} - 1 \approx \frac{1}{4\pi x}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que leurs valeurs absolues tendent à être identiques. On retiendra donc :

$$|\varepsilon| \leq 1/4\pi x. \quad (5)$$

Si une mesure de tension efficace s'effectue en découpant une tranche du signal dont la durée n'est pas contrôlée précisément, c'est-à-dire non synchronisée sur un nombre entier de demi-périodes, il faut dépasser une durée d'environ $10^6/4\pi \approx 80\,000$ périodes pour être certain d'une erreur inférieure à 1×10^{-6} .

Et donc, à 50 Hz, il faut au moins 1 600 s.

2.2. Techniques de réduction de l'erreur

Dans le cas d'une mesure numérique, il y a simultanément troncature et échantillonnage. Une première méthode pour réduire cette erreur est de ne prendre en compte qu'un nombre d'échantillons correspondant à un nombre « presque entier » de périodes ou de demi-périodes, c'est-à-dire de telle façon que la différence entre la durée totale d'observation et le plus proche nombre entier de périodes ou de demi-périodes soit inférieure à une période de l'horloge d'échantillonnage.

Une correction doit alors être apportée en estimant cette différence de temps, et cette méthode a déjà fait l'objet de plusieurs études [1–3].

2.3. Le fenêtrage

L'erreur provient des « petits bouts de demi-cycles » en début et en fin du créneau découpant le signal. Ceci est tout à fait comparable à ce qui se passe en analyse spectrale, où l'on pallie cette erreur par un fenêtrage, c'est-à-dire une pondération du signal par une fonction qui, en

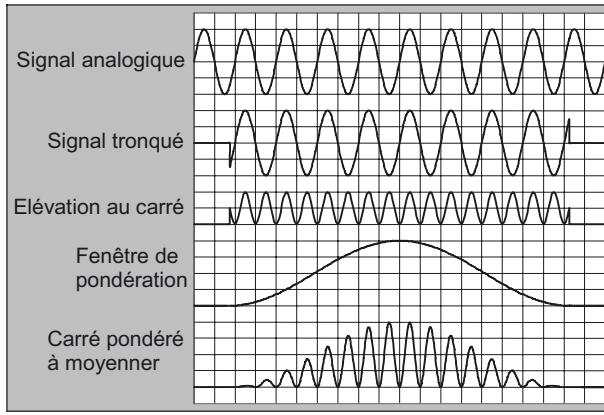


Fig. 2. – Exemple de fenêtrage.

affectant la forme d'une cloche, donne un poids faible ou nul aux données du début et de la fin de la tranche acquise : les discontinuités sont ainsi estompées.

De nombreuses études ont été publiées sur le sujet dont par exemple [4, 5] et la bibliothèque du logiciel LabVIEW™ 8.5 offre au programmeur quatorze fonctions de pondérations différentes.

Notons que ce fenêtrage est totalement indépendant de l'échantillonnage, sa théorie peut parfaitement s'appliquer à des signaux analogiques continus au sens de la continuité des fonctions mathématique.

Le résultat des calculs n'est pas le même selon qu'on applique la fenêtre sur le signal ou sur son carré, mais on peut appliquer une correction qui est parfaitement calculable.

La figure 2 montre l'exemple d'une fenêtre de Hann¹, qui est une simple arche de sinus décentrée, appliquée au signal *après* son élévation au carré.

Nous allons étudier la théorie de cette fenêtre de Hann, appliquée avant ou après l'élévation au carré.

2.3.1. Propriété de la fenêtre de Hann « après le carré »

Sur l'intervalle $0 \leq t \leq xT$ la fenêtre de Hann de gain unité s'exprime ainsi :

$$f(t) = 1 - \cos(2\pi t/xT) = 1 - \cos(\omega t/x) \quad (6)$$

et $f(t) = 0$ en dehors.

La valeur efficace du signal pondéré est :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{xT} \int_0^{xT} z(t) \cdot dt \quad (7)$$

avec :

$$z(t) = y^2(t) \cdot f(t) = \sin^2(\omega t + \varphi) \cdot (1 - \cos(\omega t/x)). \quad (8)$$

¹ De *Julius von Hann*, mais on dit à tort de *Hanning* par similitude avec la fenêtre de *Richard Hamming*, qui en est une variante.

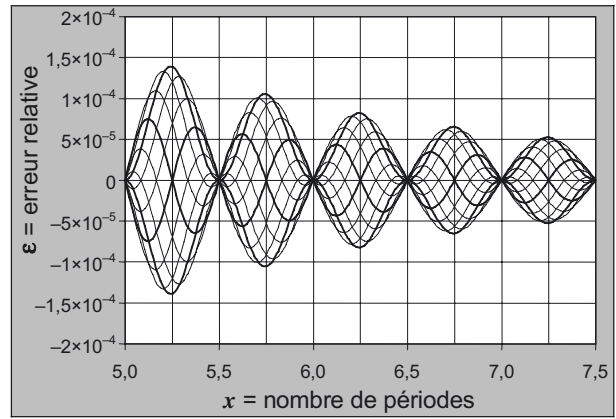


Fig. 3. – Fenêtre de Hann appliquée après le calcul du carré.

Ce qui s'écrit (calcul détaillé en Annexe A2) :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(4\pi x + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{8\pi(4x^2 - 1)x} \quad (9)$$

et on en tire :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, \varphi) &= \sqrt{2V^2(x, \varphi) - 1} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{2\pi(4x^2 - 1)x} - 1}. \quad (10) \end{aligned}$$

Cette fonction (8) est représentée en figure 3, à comparer à la figure 1.

Quand $8\pi x^3 \gg 1$, on en conclut :

$$|\varepsilon| \leq 1/16\pi x^3. \quad (11)$$

Et, avec un x^3 au dénominateur, il suffit maintenant de dépasser 27 périodes pour atteindre une erreur inférieure à 1×10^{-6} .

2.3.2. Propriété de la fenêtre de Hann « avant le carré »

La fonction de fenêtre $f(t) = 1 - \cos(2\pi t/xT)$ a une valeur moyenne égale à 1 dans l'intervalle $0 \leq t \leq xT$.

Appliquée au carré du signal avec lequel elle n'a aucune corrélation, elle n'affecte pas la valeur moyenne de ce carré ni la valeur efficace du signal.

Mais, appliquée au signal lui-même, elle affecte sa valeur efficace sans affecter sa valeur moyenne. Pour s'en convaincre, on peut l'appliquer à un signal continu unité : la valeur efficace est égale à 1. Or l'intégrale calculée va être :

$$\begin{aligned} \frac{1}{xT} \times \int_0^{xT} f^2(t) \cdot dt &= \frac{1}{xT} \times \int_0^{xT} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{xT}\right) \right]^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{xT} \times \int_0^{xT} \left[\frac{3}{2} - 2\cos\left(\frac{2\pi t}{xT}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi t}{xT}\right) \right] \cdot dt = \frac{3}{2}. \quad (12) \end{aligned}$$

On peut donc prédire qu'il faudra multiplier le résultat final par $2/3^2$, et la valeur efficace du signal s'écrit maintenant :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{xT} \int_0^{xT} z(t) \cdot dt \quad (13)$$

avec :

$$z(t) = \sin^2(\omega t + \varphi) \times [1 - \cos(\omega t/x)]^2. \quad (14)$$

On démontre (détail en Annexe A3) que :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{4\pi(4x^2 - 1) \times (x^2 - 1)x}. \quad (15)$$

D'où on tire :

$$\varepsilon(x, \varphi) = \sqrt{1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{2\pi(4x^2 - 1) \times (x^2 - 1)x}} - 1. \quad (16)$$

Et quand $8\pi x^5 \gg 1$, on a :

$$|\varepsilon| \leq 1/16\pi x^5. \quad (17)$$

Avec cet ordre 5, on atteint maintenant 1×10^{-6} en dépassant de peu sept périodes.

3. L'échantillonnage

Les calculs précédents ont été faits sur des signaux tronqués (découpés sur une durée finie), mais continus, c'est-à-dire non échantillonnés. Si maintenant dans cette durée on ne prélève qu'un nombre fini d'échantillons, on peut commettre des erreurs supplémentaires.

3.1. Sur une seule période

Lorsque le signal est parfaitement sinusoïdal, un nombre d'échantillons quelconque supérieur à 3 donne la valeur efficace sans aucune erreur si l'échantillonnage se fait bien sur une période entière :

$$\forall \varphi, \forall N \geq 3 : \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{2k\pi}{N} + \varphi\right) = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

De façon plus générale, sur un signal distordu comportant des harmoniques de rang inférieur ou égal à P , il suffit de $N = 2P + 1$ échantillons. C'est une conséquence directe du théorème de Shannon.

² Ce nombre $3/2$ est la « bande équivalente de bruit » de la fenêtre, coefficient à appliquer aux mesures des densités de puissance de bruit en analyse spectrale.

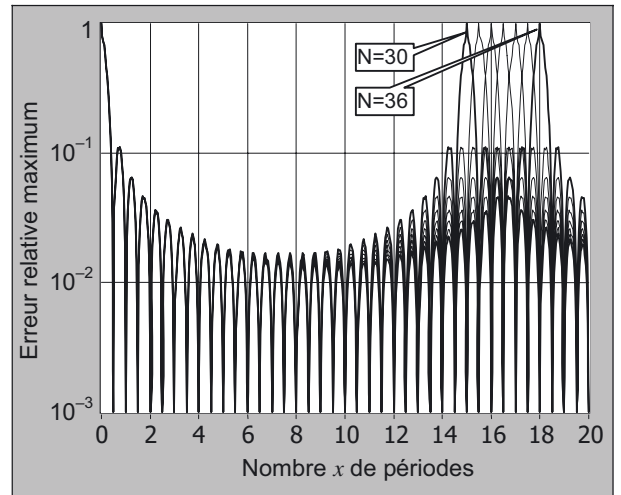


Fig. 4. – Échantillonnage sur un nombre non entier de périodes.

3.2. Sur un nombre entier de demi-périodes

De même, un minimum de deux échantillons uniformément répartis sur une demi-période donne une valeur correcte.

$$\forall \varphi, \forall N \geq 2 : \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{N} + \varphi\right) = \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Mais ces points peuvent être uniformément répartis sur un nombre entier de demi-périodes supérieur à 1 sauf si ce nombre de demi-périodes est un multiple du nombre de points.

$$\left. \forall \varphi, \forall N \geq 2, \forall P \right\} \Rightarrow \frac{1}{N} \times \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{kP\pi}{N} + \varphi\right) = \frac{1}{2}. \quad (20)$$

On peut donc faire des mesures exactes avec seulement 2 points sur 1, 3 ou 5 demi-périodes, mais surtout pas un nombre entier de périodes ou encore avec trois points sur 1, 2 ou 4 demi-périodes mais pas sur 3 ou 6.

Ainsi, avec seulement 2 points, on a :

$$\left. \forall \varphi, \forall P \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{kP\pi}{2} + \varphi\right) \\ P \text{ impair} \end{cases} = \frac{1}{2} [\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)] = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

3.3. Sur un nombre non entier de demi-périodes

Nous avons réalisé des simulations à l'aide de LabVIEW.

Les tracés de la figure 4 représentent l'erreur maximum sur la valeur efficace calculée, lorsque l'on fait varier la phase de l'horloge d'acquisition et que l'on n'a appliqué qu'une fenêtre rectangulaire, c'est-à-dire aucune pondération. Le paramètre N est le nombre d'échantillons.

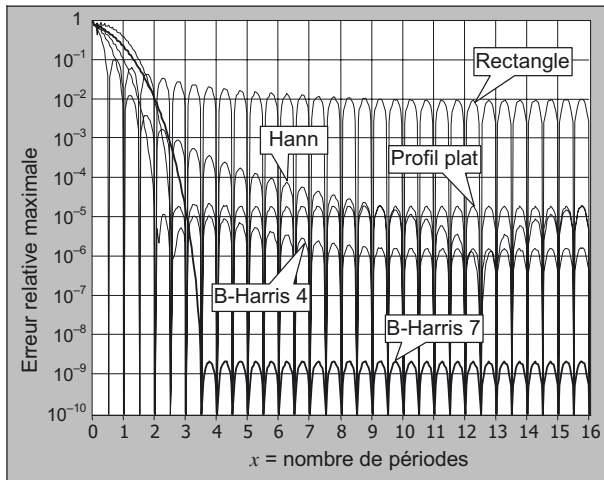


Fig. 5. – Fenêtres appliquées après le calcul du carré.

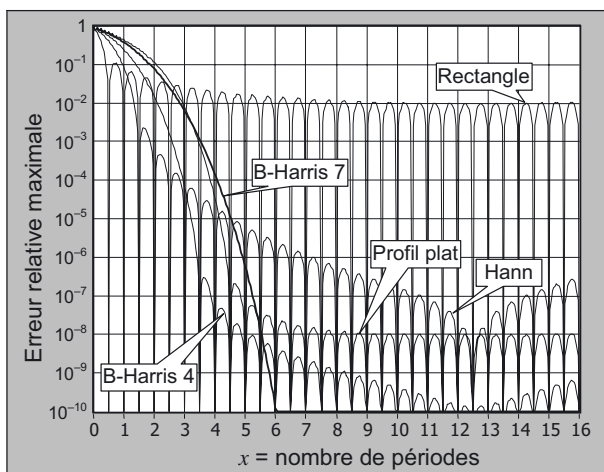


Fig. 6. – Fenêtres appliquées avant le calcul du carré.

Quel que soit ce nombre de points, l'erreur est nulle quand le nombre de demi-périodes est entier, sauf si on n'a qu'un seul point par demi-période, ainsi qu'on l'a énoncé plus haut (exemple : 32 points sur 16 périodes). En effet, la pire des phases est alors 0° , car on n'échantillonne le signal qu'à ses passages à zéro. La valeur efficace calculée est alors zéro et l'erreur relative égale à 1. L'effet stroboscopique et le repliement du spectre font que les courbes admettent un axe de symétrie et leur enveloppe passe donc par un minimum autour d'un nombre de demi-périodes égal à la moitié du nombre de points, soit 4 points par période.

Échantillonner sur un grand nombre de périodes ne sert donc à rien si ce n'est pas avec un nombre suffisant d'échantillons.

3.4. Comparaison de différentes fenêtres

Les exemples des figures 5 et 6 sont tracés avec $N = 50$ échantillons. On y voit l'avantage apporté par la fenêtre « Blackman-Harris à sept termes » appliquée avant le calcul du carré car, avec seulement 50 points acquis,

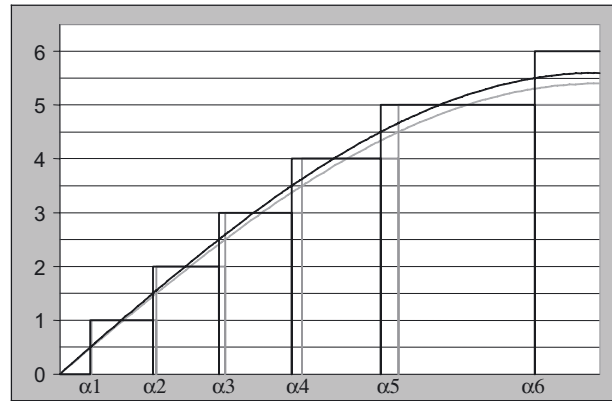


Fig. 7. – Seuils de quantification sans décalage.

elle réduit l'erreur à moins de 1×10^{-10} au-delà de six périodes.

4. La quantification

La quantification est l'arrondi de la mesure à un multiple d'un pas. Son effet est celui d'une distorsion complexe du signal, bien qu'en télécommunications on considère que c'est un bruit aléatoire (le signal est lui-même considéré comme aléatoire). Elle n'est pas nécessairement liée à l'échantillonnage, car on peut bien échantillonner sans quantifier ou quantifier sans échantillonner.

Le nombre de paliers de quantification est fonction du nombre de bits ou de chiffres décimaux du convertisseur analogique-numérique, mais également fonction du rapport de la tension crête-crête du signal à la pleine échelle du convertisseur : on a tout intérêt à explorer au maximum cette pleine échelle.

Si le signal n'a pas de composante continue et que la conversion analogique-numérique se fait sans aucune tension de décalage, les demi-alternances positives et négatives redonnent exactement la même information, le signal « occupe » toujours un nombre impair de paliers de $-N$ à $+N$ en passant par zéro, soit $2N + 1$.

S'il y a une composante continue cette symétrie disparaît généralement.

4.1. Sans composante continue

Avec LabVIEW nous avons effectué des simulations en calculant la valeur efficace d'une sinusoïde dont l'amplitude est variable mais dont la valeur instantanée est arrondie au nombre entier le plus proche.

L'unité d'amplitude est donc le pas de quantification et une amplitude égale par exemple à 127 correspond ainsi à une numérisation sur 8 bits soit une échelle couvrant de -127 à $+127$.

Ce calcul a été effectué sur un quart de période en calculant à quels angles les seuils sont franchis (Fig. 7). Il est donc équivalent à celui d'une intégrale continue et non d'une somme discrète d'échantillons.

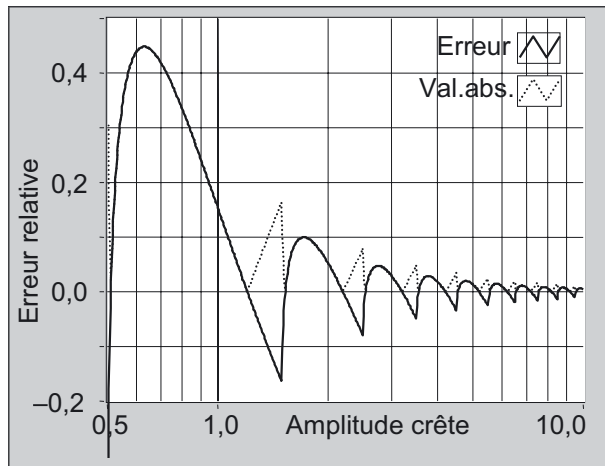


Fig. 8. – Erreur apportée par la quantification.

Soit A l'amplitude du signal. La tension efficace calculée, soit V , est donnée par :

$$V^2(A) = \sum_{k=1}^{k=\text{ent}(A+0,5)} k^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \quad (22)$$

avec $\alpha_k = \arcsin\left(\frac{k-0,5}{A}\right)$ si $k < A$, sinon $\alpha_k = \pi/2$.

La valeur attendue est $V < A\sqrt{2}$ et l'erreur relative est donc :

$$\varepsilon(A) = \frac{\sqrt{2}V^2}{A-1}. \quad (23)$$

Elle est représentée en traits pleins sur la figure 8 et en pointillés sa valeur absolue.

Les minimums locaux correspondent à une « cassure » nette : quand l'amplitude croît et franchit la limite où entre en action un nouveau palier entier la dérivée est discontinue puisque la fonction change d'expression mathématique ; et ceci se produit aux amplitudes égales à un nombre entier $+1/2$. Les maximums locaux se produisent en des points qu'il n'est pas possible d'exprimer de façon générale en raison de ce changement d'expression de la fonction à chaque palier.

Il apparaît que la valeur absolue des minimums est plus grande que celle des maximums qui l'encadrent, (sauf pour les deux premiers). Il est donc aisé de tracer une ligne des crêtes en ne prenant que des abscisses entières $+1/2$. Sur le graphe logarithmique de la figure 9, cette ligne de crête apparaît en pointillés comme une droite de pente $-3/2$: l'erreur maximum décroît avec l'amplitude A comme $A^{-3/2}$, c'est-à-dire qu'en passant de N à $N+1$ bits, on divise l'erreur non pas par 2 mais par $2\sqrt{2} \approx 2,83$. On notera également qu'avec une amplitude égale à 32767, soit 16 bits réellement utilisés dont le bit de signe, l'erreur est inférieure à 1×10^{-7} .

Tout ceci n'est vrai que s'il n'y a aucune autre source d'erreur et, entre autres, que le signal n'est pas échantillonné (ou qu'il y a un nombre infini d'échantillons ac-

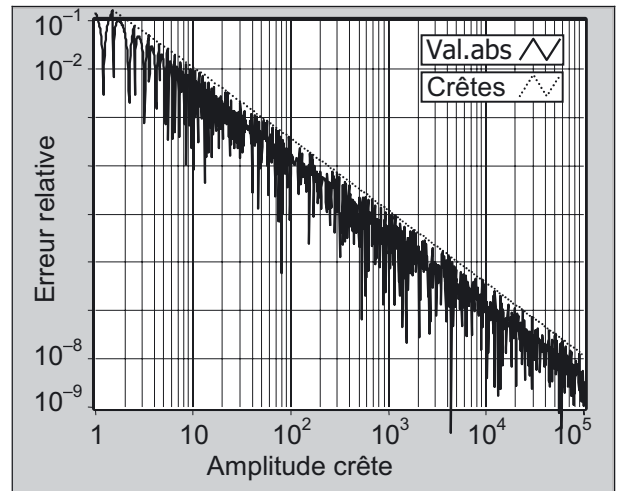


Fig. 9. – Majorant de l'erreur de quantification.

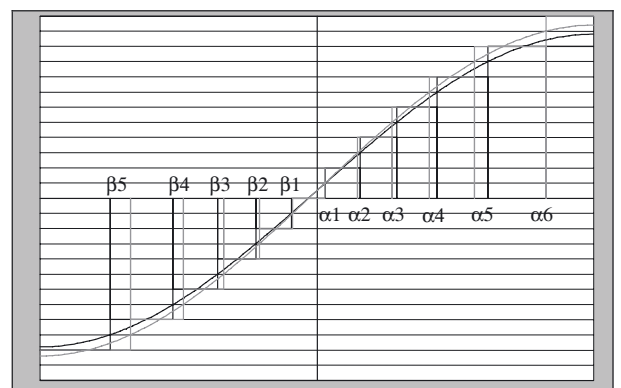


Fig. 10. – Quantification avec un décalage.

quis à une fréquence infinie), qu'il est parfaitement sinusoïdal et que la quantification est parfaitement linéaire...

4.2. Avec une composante continue

Les demi-alternances positives et négatives ne donnent pas la même information sauf si le décalage est exactement d'un demi-pas, et l'erreur est donc généralement différente. Selon l'amplitude, le nombre de paliers peut être aussi bien pair (exemple gris sur Fig. 10) qu'impair (exemple noir).

La figure 11 représente les tracés effectués pour des décalages de quart de pas en quart de pas : les courbes obtenues pour $1/4$ ou $3/4$ sont superposées.

Sur le graphe logarithmique réduit aux seules lignes de crête, représenté sur la figure 12, on constate que la pente $-3/2$ des asymptotes se conserve. Les courbes obtenues pour les décalages 0 et 0,5 se confondent très vite.

Enfin, en fonction de ce décalage, nous avons donc tracé figure 13 la variation de ce maximum recherché en faisant varier l'amplitude entre 32000 et 32001, ce qui correspond à une conversion sur 16 bits bien employée.

On constate une périodicité de cette erreur et un rapport des maximums aux minimums très proche de $2\sqrt{2}$. En effet, quand le décalage est 0 ou $1/2$ pas, la symétrie

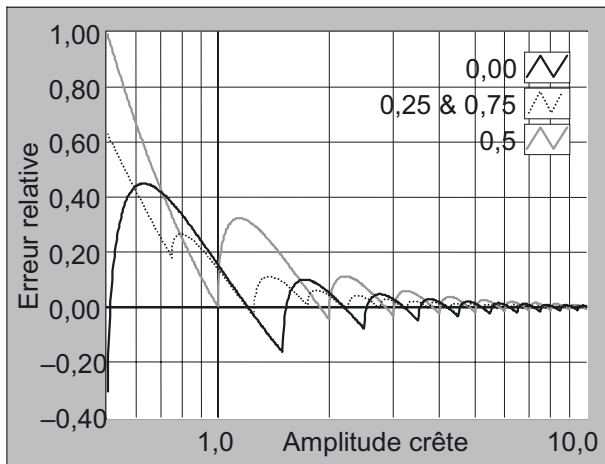


Fig. 11. – Erreur de quantification pour différents décalages.

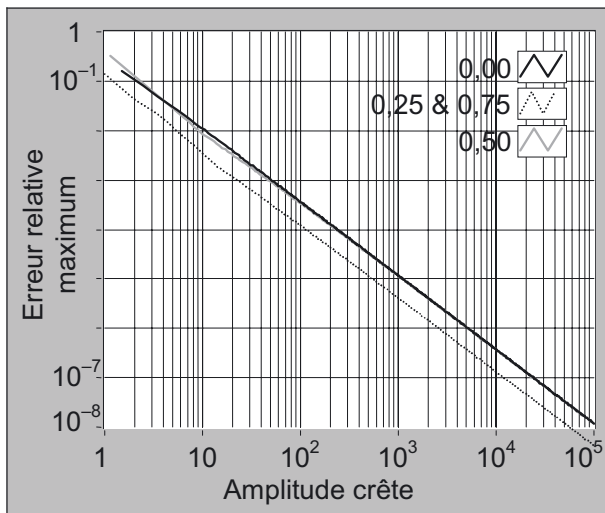


Fig. 12. – Erreur de quantification pour différents décalages.

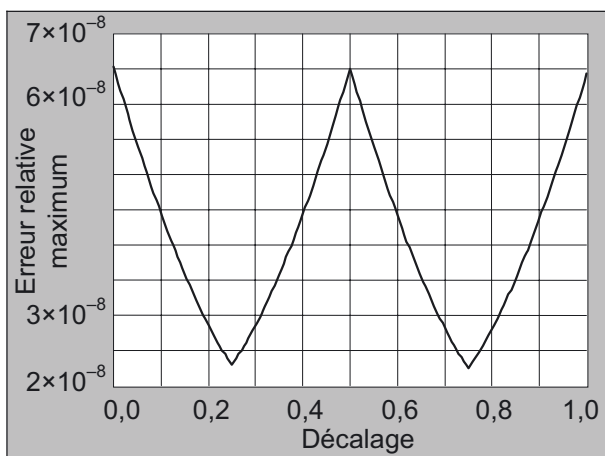


Fig. 13. – Erreur en fonction du décalage.

conduit à un bit en moins car le bit de signe ne sert à rien dans le calcul de la valeur efficace et n'apporte aucune information. Tandis qu'un décalage d'un ou trois quarts de pas double bien la quantité d'information exploitable.

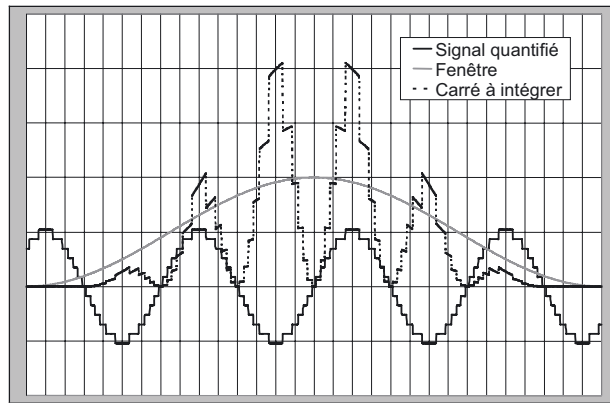


Fig. 14. – Quantification et troncature.

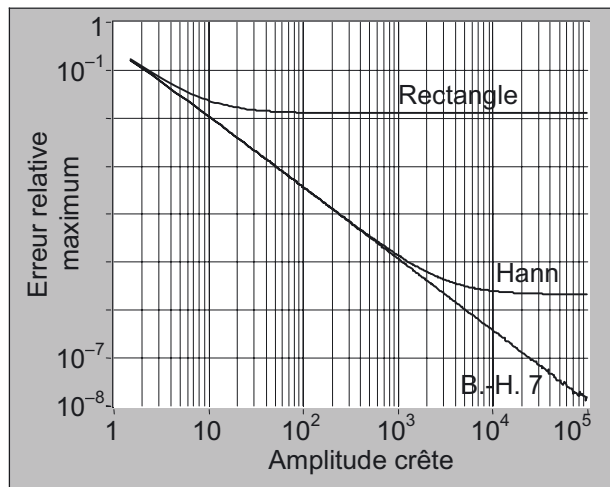


Fig. 15. – Effets de trois fenêtres sur 6,25 périodes.

5. Effets combinés

5.1. Quantification et troncature

Le signal quantifié sans décalage est maintenant volontairement mal découpé, c'est-à-dire limité à un nombre entier de demi-périodes plus un quart, tout en démarrant sur une mauvaise phase, ceci afin de cumuler toutes les erreurs. Etudions l'effet bénéfique du fenêtrage.

Pour faire un calcul exact, il faudrait intégrer le carré de cette fonction de pondération sur les petits segments où le signal est constant (Fig. 14) mais nous nous sommes contentés d'un échantillonnage « très serré » (avec plus de 5×10^6 échantillons) qui a demandé un grand temps de calcul.

Les tracés des figures 15 et 16 ont été effectués en retenant la plus grande des valeurs absolues des erreurs lorsque la phase de départ est $-\pi/4$ ou $+\pi/4$, et ce uniquement pour des valeurs de l'amplitude égales à un nombre entier $+1/2$. L'erreur décroît avec cette amplitude A selon la loi en $A^{-3/2}$ jusqu'à atteindre une limite dépendant à la fois du fenêtrage (appliqué ici toujours avant l'élévation au carré) et du nombre de périodes observées. L'usage de la fenêtre de Blackman-Harris à sept

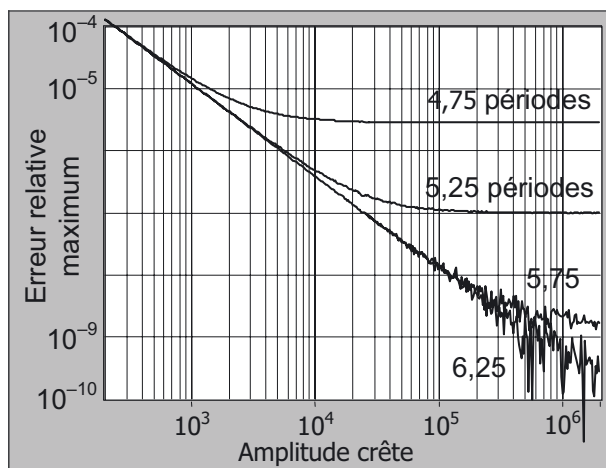


Fig. 16. – Effet de la durée sur un fenêtrage « B.-H.7 ».

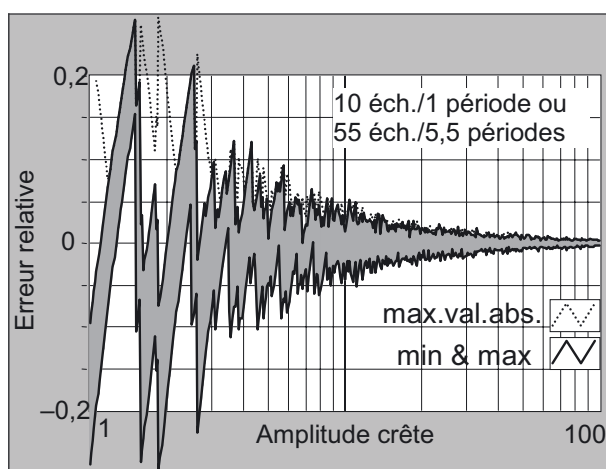


Fig. 17. – Erreur avec un petit nombre d'échantillons utiles.

termes (repérée « B.-H.7 ») rejette cette limite en dessous de 10^{-8} .

Toutefois, la simulation ne semble pas très exacte quand on atteint ce seuil car des irrégularités apparaissent sur les courbes.

5.2. Quantification et échantillonnage

Si l'on ajoute les effets de l'échantillonnage (sur un nombre entier de demi-périodes) à ceux de la quantification, on constate que lorsque la phase du signal varie dans la fenêtre d'acquisition, la courbe d'erreur relative sur la valeur efficace calculée se déplace en occupant toutes les positions entre une valeur maximum et une valeur minimum (plage grise entre les deux courbes noires dans les Figs. 17 à 21), et qu'elle ne décroît plus aussi vite avec l'amplitude.

Bien sûr, la plage d'erreur diminue quand le nombre d'échantillons utiles augmente (Figs. 17 et 18) : il y a bien un effet de moyennage. Si le nombre d'échantillons et le nombre de demi-périodes ne sont pas premiers entre eux, un certain nombre d'échantillons sont repris sur des phases qui ont déjà été échantillonnées

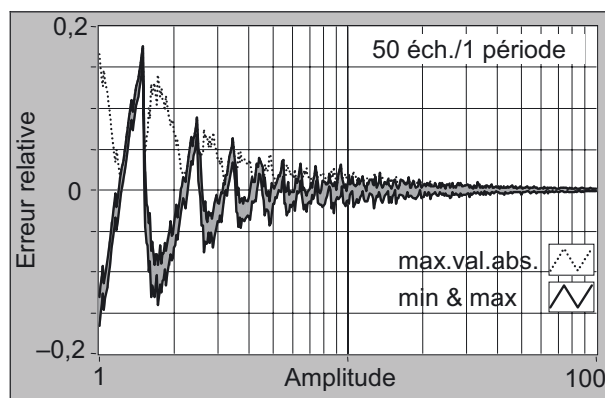


Fig. 18. – Augmentation du nombre d'échantillons.

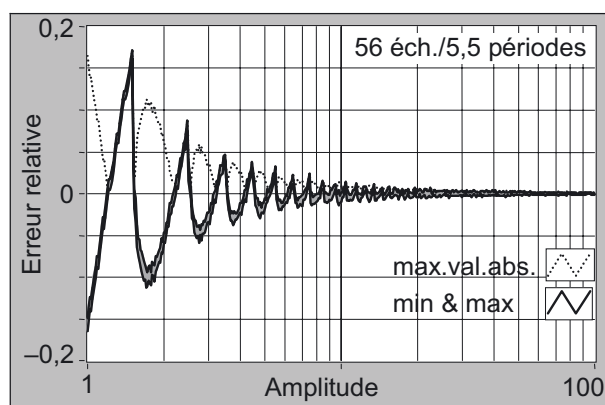


Fig. 19. – Nombre d'échantillon et de demi-périodes premiers entre eux.

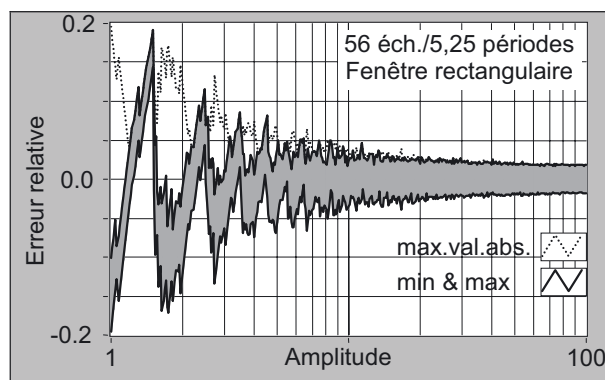


Fig. 20. – Nombre de demi périodes non entier.

sur les demi-périodes précédentes et, en l'absence de bruit, ils n'apportent pas de nouvelle information. Ainsi 55 échantillons pris sur 5,5 périodes donnent exactement les mêmes erreurs que 10 échantillons sur une seule (Fig. 17) ou même 5 échantillons sur 1, 2, 3 ou 4 demi-périodes mais pas 5 (cas non illustrés).

Mais avec un seul échantillon de plus sur la même durée de 5,5 périodes l'erreur est bien plus faible (Fig. 19) car les nombres d'échantillons (soit 56) et de demi-périodes (soit 11) sont alors premiers entre eux.

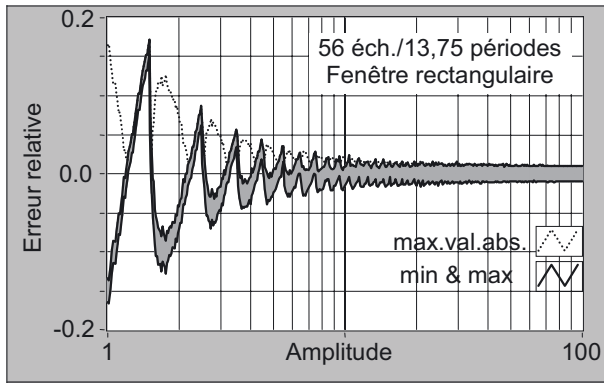


Fig. 21. – Augmentation de la durée.

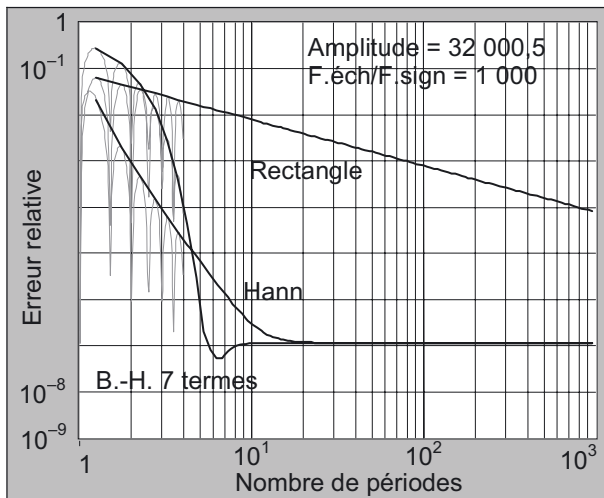


Fig. 22. – Erreur en fonction de la durée.

5.3. Quantification, troncature et échantillonnage

Les trois causes d'erreur s'ajoutent. On voit sur les figures 20 et 21 qu'en l'absence de fenêtrage, la plage d'erreur ne tend donc plus vers zéro quand l'amplitude tend vers l'infini mais vers une limite qui dépend du nombre de demi-périodes, avec des valeurs maximales quand ce nombre est un entier plus 0,5 ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 1.1.

Avec un signal d'amplitude donnée, c'est-à-dire avec un nombre de paliers ou de bits donné, nous avons posé le problème de deux façons différentes.

5.3.1. Durée minimum

Avec une fréquence d'acquisition imposée, quelle est la durée minimale nécessaire pour atteindre une erreur maximale donnée ?

Sur la figure 22 la valeur absolue de l'erreur est représentée de façon détaillée au début, puis seulement la ligne de crête qui passe par les maximums obtenus pour les nombres entiers de demi-périodes plus un quart. La fréquence d'échantillonnage est 1 000 fois la fréquence du signal. On voit que, passé un certain nombre de périodes, l'erreur tend vers une limite qui dépend de l'amplitude

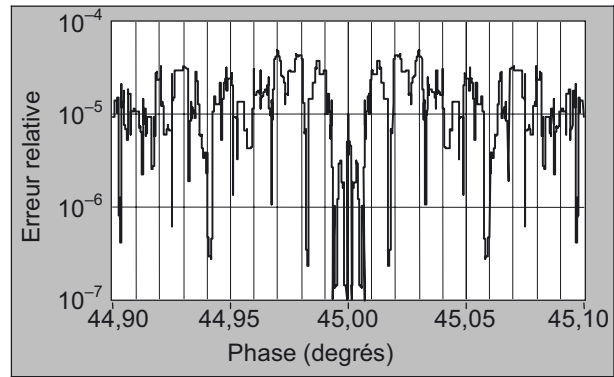


Fig. 23. – Exemple de variation de l'erreur avec la phase.

(c'est-à-dire de la résolution), de la fréquence d'échantillonnage (donc du nombre d'échantillons) et de la phase mais pas de la fenêtre employée. En pratique, avec une fenêtre performante, il suffit de dépasser 7 ou 8 périodes.

5.3.2. Nombre d'échantillons

Avec une durée imposée, comment varie l'erreur maximale avec le nombre d'échantillons ?

Nous avons donc pour cela volontairement choisi une « mauvaise durée » de 8,25 périodes qui donne un maximum d'erreur de troncature, masquée par l'usage de la fenêtre de Blackman-Harris à sept termes.

Cette erreur dépend de la phase de départ du signal. Si la durée est suffisante et le fenêtrage efficace, il n'y a pas de maximum autour de -45° ou $+45^\circ$, c'est l'erreur liée à la quantification qui prime, et elle semble varier de façon totalement aléatoire et discontinue en fonction de cette phase, la figure 23 n'en est qu'un exemple.

En effet, pour une toute petite variation de phase, il suffit qu'un seul des échantillons passe d'un palier de quantification au suivant pour que l'erreur varie brutalement.

Il est dès lors très difficile de donner une valeur maximale à cette erreur. Nous avons donc procédé à des études statistiques en évaluant l'écart type de l'erreur, lorsqu'on fait varier trois paramètres de façon aléatoire avec une densité de probabilité constante sur les intervalles suivants :

- la phase de $-\pi/2$ à $+\pi/2$;
- le décalage de 0 à +1 ;
- la durée de 8,0 à 8,5 périodes.

Le tracé représenté sur la figure 24 a été obtenu en balayant les valeurs de l'amplitude A en 50 points par décades de 10^2 à 10^6 (soit des résolutions d'environ 8 à 21 bits) et le nombre N d'échantillons en deux points par décades de 10^3 à 10^6 . Pour chaque couple A, N on a effectué 17 600 tirages et l'écart type de l'erreur a été calculé. Comme précédemment, la fenêtre de Blackman-Harris à

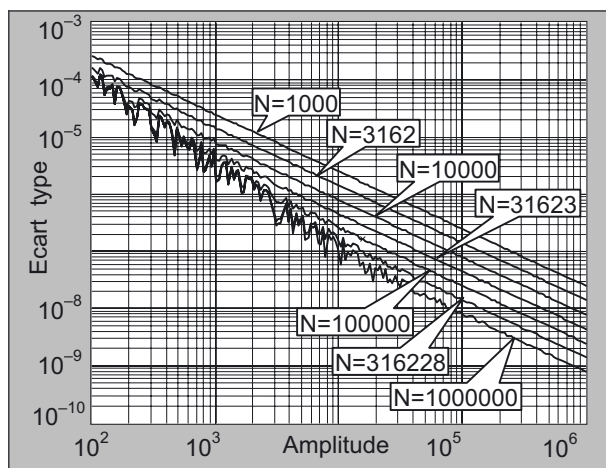


Fig. 24. – Tirages aléatoires.

sept termes a été appliquée avant le calcul du carré du signal.

On peut distinguer deux zones :

- À gauche, une zone où l'erreur ondule grossièrement autour de $0,1/A^{3/2}$, en tendant à être indépendante de N . Si ce nombre est assez grand les sept courbes se rejoignent sur une asymptote commune, et on retrouve la pente $-3/2$ constatée pour une valeur infinie de N au paragraphe 5.1 ;
- À droite, des droites régulières où l'écart type est à peu près $0,8/A \sqrt{N}$ (les courbes sont régulièrement étagées, avec quatre valeurs de N par décade).

5.3.3. Étude statistique

Pour confirmer cette dernière loi, nous avons procédé à une évaluation en faisant, comme précédemment, varier de façon aléatoire la phase, le décalage et la durée dans les mêmes limites mais aussi le nombre N de 1×10^2 à 1×10^6 et l'amplitude A de $0,5N$ à 1×10^7 . Ces deux dernières variables étant uniformément réparties sur des échelles logarithmiques (mais N est arrondi au nombre entier le plus proche).

Pour chaque tirage, l'erreur ε est calculée, puis le coefficient, classé en 500 tranches uniformément réparties de -5 à $+5$ (aucun point n'est tombé en dehors de cet intervalle). La moyenne de ce coefficient reste petite devant son écart type qui est bien à peu près 0,78. Sur le graphe de la figure 25 la courbe gaussienne apparaît en trait continu gris comme une parabole en raison de l'axe vertical logarithmique, et elle coïncide très bien avec les points calculés (en noir) sur plus de quatre décades.

On peut donc dire que dans le domaine $A \geq 0,5N$ l'erreur est répartie autour de 0 selon une loi gaussienne, avec un écart type $\sigma = 0,78/A \sqrt{N}$, ceci à condition que le fenêtrage et la durée rendent l'erreur de troncature négligeable.

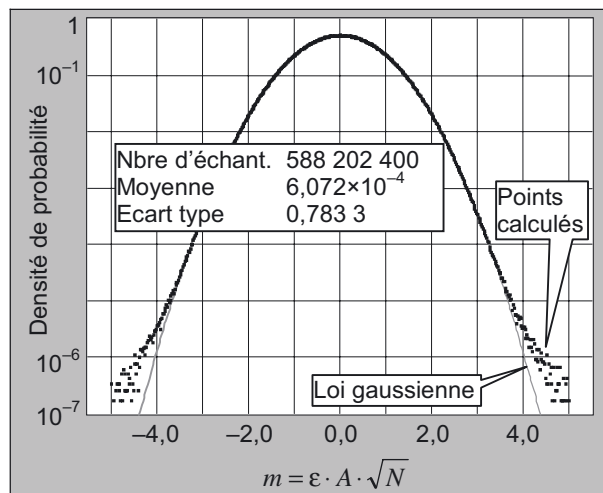


Fig. 25. – Histogramme des erreurs.

Si on explore le domaine des rapports A/N inférieurs, on trouve sur ce coefficient m un écart type plus grand, et une moindre concordance avec la loi gaussienne. Cela s'explique par le fait que la variation avec A tend alors à échapper à cette loi en $1/A$ pour tendre vers la loi en $1/A^{3/2}$ (constatée ci-dessus et au § 4.1) en l'absence d'échantillonnage.

6. Mesure de phase ou de puissance

De la même manière, nous allons nous intéresser à des mesures portant sur deux signaux sinusoïdaux à la même fréquence :

$$u = U_c \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i = I_c \cdot \sin(\omega t + \varphi_2).$$

En intégrant et moyennant leurs carrés respectifs, on calculera leurs amplitudes ou valeurs efficaces (et donc une puissance apparente $P_a = U_c \cdot I_c/2$). En intégrant et moyennant leur produit, on calculera une puissance active et, avec ces deux puissances, on calculera un facteur de puissance ou une phase.

6.1. Erreur de troncature

Avec les mêmes notations : $T = 2\pi/\omega$ la période du signal, et $0 \leq t \leq xT$ l'intervalle d'intégration, calculons :

$$\begin{aligned} U^2(x, \varphi_1) &= \frac{U_c^2}{xT} \int_0^{xT} \sin^2(\omega t + \varphi_1) \cdot dt \\ &= \frac{U_c^2}{2} \left(1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi_1) \cdot \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right) \\ I^2(x, \varphi_2) &= \frac{I_c^2}{xT} \int_0^{xT} \sin^2(\omega t + \varphi_2) \cdot dt \\ &= \frac{I_c^2}{2} \left(1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi_2) \cdot \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right) \end{aligned}$$

et de la même manière :

$$\begin{aligned}
P(x, \varphi_1, \varphi_2) &= \frac{U_c \cdot I_c}{xT} \times \int_0^{xT} \sin(\omega t + \varphi_1) \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \cdot dt \\
&= \frac{U_c \cdot I_c}{2xT} \times \int_0^{xT} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)] \cdot dt \\
&= \frac{U_c \cdot I_c}{2xT} \times \left(\frac{xT \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} - \frac{\sin(2\omega xT + \varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2\omega} \right) \\
&= \frac{U_c \cdot I_c}{2} \times \left(\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} - \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right).
\end{aligned}$$

6.1.1. Erreur sur la mesure de puissance

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P}{P} &= \frac{P(x, \varphi_1, \varphi_2) - \frac{U_c I_c}{2} \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\frac{U_c I_c}{2} \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\
&= -\frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}
\end{aligned}$$

soit en notant $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: $\left| \frac{\delta P}{P} \times \cos(\varphi) \right| \leq \frac{1}{2\pi x}$.

On voit bien que si φ est voisin de 90° , l'erreur relative sur la puissance active devient très grande.

6.2. Erreur sur la mesure du facteur de puissance

C'est le rapport de la puissance active à la puissance apparente, on va donc calculer :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{P(x, \varphi_1, \varphi_2)}{U(x, \varphi_1) \times U(x, \varphi_2)} = \\
&= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi_1) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x}\right) \times \left(1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x}\right)}}.
\end{aligned}$$

Quand $2\pi x \gg 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
F &\approx \left(1 + \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi_1) + \cos(2\pi x + 2\varphi_2)}{4\pi x} \right) \times \sin(2\pi x) \\
&\times \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right) \\
&= \left(1 + \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right) \\
&\times \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right).
\end{aligned}$$

Soit en notant $\varepsilon = \frac{\cos(2\pi x + \varphi_1 + \varphi_2) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x}$ et

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 : F = (1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)) \times (\cos(\varphi) - \varepsilon).$$

L'erreur sur ce facteur de puissance, qui devrait être $\cos(\varphi)$, est donc :

$$\begin{aligned}
\delta \cos(\varphi) &= -\delta\varphi \cdot \sin(\varphi) = F - \cos(\varphi) \\
&= -\varepsilon \cdot \sin^2(\varphi) - \varepsilon^2 \cdot \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

ou $\delta\varphi = \varepsilon(\sin(\varphi) + \varepsilon \cdot \cot(\varphi))$.

Si φ n'est pas proche de 0, et $\varepsilon \ll 1$ on peut écrire $\delta\varphi \approx \varepsilon \cdot \sin(\varphi)$ et $|\delta\varphi| \leq \sin(\varphi)/2\pi x$.

Au voisinage de $\varphi = 0$, on peut écrire $\delta\varphi \approx \varepsilon\varphi + \varepsilon^2/\varphi$ et il n'y a pas grand chose à conclure. En effet, on ne peut pas mesurer des angles très proches de zéro en mesurant des puissances, car les erreurs peuvent conduire à $\cos(\varphi) > 1$.

6.3. Combinaison des trois sources d'erreur

Sans refaire tout le détail de l'étude précédente sur la mesure d'une tension ou d'un courant efficace, pour la puissance, nous avons directement procédé à une étude statistique de la mesure en faisant *a priori* les hypothèses suivantes :

- le fenêtrage a la même action bénéfique. On peut l'appliquer sur chacun des signaux (tension et courant) avant le calcul de leur produit ou sur leur produit. L'application sur les signaux avant le calcul du produit est plus performante et nous avons encore retenu la fenêtre de Blackman-Harris à sept termes ;
- l'échantillonnage des deux signaux doit bien sûr être absolument synchrone mais l'horloge commune d'échantillonnage peut avoir une phase quelconque par rapport aux deux signaux. Dans un certain domaine, l'erreur varie comme $1/\sqrt{N}$ (N est le nombre d'échantillons) ;
- l'erreur varie comme $1/\cos(\varphi)$;
- soient U_c et I_c les tension et courant de crête, et Δ_u et Δ_i leurs résolutions respectives, et les amplitudes en unités réduites : $A_u = U_c/\Delta_u$ et $A_i = I_c/\Delta_i$ qui peuvent être différentes. Mais si elles sont toutes deux égales à A , l'erreur varie comme $1/A$. Après quelques tâtonnements, il a été supposé que l'erreur variait comme $1/A_u + 1/A_i$.

Pour vérifier ces hypothèses, nous avons procédé, comme précédemment, à une étude de répartition statistique de l'erreur relative en effectuant plus de 46×10^6 tirages (Fig. 26) et en faisant varier les paramètres suivants de façon aléatoire et indépendamment les uns des autres :

- le nombre N d'échantillons, uniformément répartis sur une échelle logarithmique de 10^2 à 10^6 avant d'être arrondi nombre entier le plus proche ;

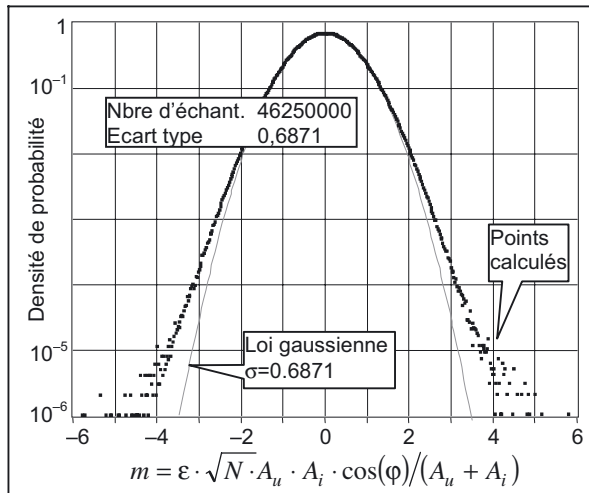


Fig. 26. – Erreurs sur une mesure de puissance.

- les amplitudes A_u et A_i , uniformément réparties sur une échelle logarithmique de $N/10$ à 10^6 ;
- les décalages sur la tension et le courant, uniformément répartis de 0 à +1 unité réduite, soit de 0 à 1 pas Δ_u ou Δ_i ;
- le nombre de périodes uniformément réparti entre 8 et 8,5 ;
- la phase du découpage par rapport à la tension, uniformément répartie de -90° à $+90^\circ$;
- la phase φ entre tension et courant, uniformément répartie de 0° à 90° .

L'erreur relative ε se répartit autour de zéro, avec un écart type σ :

$$\sigma = \frac{0,69}{\cos(\varphi) \times \sqrt{N}} \times \left(\frac{1}{A_u} + \frac{1}{A_i} \right).$$

Nous faisons deux remarques :

Avec $A_u = A_i = A$, et $\cos(\varphi) = 1$, on devrait retrouver le double de l'écart type sur la valeur efficace établie au paragraphe 5.3.2, qui était $0,78/A \sqrt{N}$. En effet, la puissance étant alors le carré de la valeur efficace, l'erreur relative sur la première doit être le double de l'erreur sur la seconde. Mais ce coefficient 0,687 est un peu plus petit que 0,78 : ceci est sans doute dû au fait que l'on a fait varier indépendamment les tensions et courants ainsi que leurs décalages.

Curieusement, l'approximation gaussienne ne coïncide pas aussi bien que celle présentée pour les mesures de tension efficace (Fig. 25), et nous n'avons pas trouvé d'explication à cette petite disparité.

7. Conclusions

L'usage d'une fenêtre de pondération dont la bande équivalente de bruit est très large, telle que la fenêtre de Blackman-Harris à sept termes permet d'atteindre facilement des erreurs de troncature toujours inférieures à

1×10^{-8} sur des durées supérieures à seulement cinq ou six périodes.

Avec une telle fenêtre les effets simultanés de la troncature, de l'échantillonnage et de la quantification conduisent à des dispersions des mesures de tension efficace dont l'écart type est lié à l'amplitude A du signal (exprimée en nombre de paliers de quantification) et au nombre N d'échantillons par la relation : $\sigma = 0,78/A \sqrt{N}$, ceci pour des nombres A et N suffisamment grands et tels que $A \geq 0,5N$.

De même, pour une mesure de puissance, si A_u et A_i sont les amplitudes de la tension et du courant, exprimées en nombre de paliers de quantification, et φ la phase entre les deux signaux, la dispersion est :

$$\sigma = \frac{0,69}{\cos(\varphi) \cdot \sqrt{N}} \left(\frac{1}{A_u} + \frac{1}{A_i} \right).$$

Annexe

Détail des relations mathématiques utilisées

A1. Troncature sans fenêtrage

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{xT} \int_0^{xT} \sin^2(\omega t + \varphi) \cdot dt \quad (1)$$

$$\begin{aligned} V^2(x, \varphi) &= \frac{1}{2xT} \int_0^{xT} (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) \cdot dt \\ &= \frac{1}{2xT} \left[t - \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi)}{2\omega} \right]_{t=0}^{t=xT} \\ &= \frac{1}{2xT} \left[xT - \frac{\sin(2\omega xT + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{2\omega} \right]. \end{aligned}$$

Mais $\omega T = 2\pi$, on a donc :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin(4\pi x + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\pi x} \right].$$

En notant $p = 4\pi x + 2\varphi$ et $q = 2\varphi$, on a :

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et donc :

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \times \sin(2\pi x)}{2\pi x} \right]. \quad (2)$$

A2. Fenêtre de Hann « après l'élévation au carré »

Il s'agit de calculer

$$V^2(x, \varphi) = \frac{1}{xT} \int_0^{xT} z(t) \cdot dt \quad (7)$$

avec

$$z(t) = \sin^2(\omega t + \varphi) \cdot (1 - \cos(\omega t/x)). \quad (8)$$

Notons : $a = \omega t + \varphi$ et $b = \omega t/x$ et développons :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sin^2(a) \cdot [1 - \cos(b)] \\ &= \frac{[1 - \cos(2a)] \cdot [1 - \cos(b)]}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(2a) - \cos(b)}{2} + \frac{\cos(2a + b) + \cos(2a - b)}{4}. \end{aligned}$$

Une primitive en est :

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \times \sin(2\omega t + 2\varphi) - \frac{x}{2\omega} \times \sin(\omega t/x) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x+1)\omega} \times \sin\left(\frac{2x+1}{x}\omega t + 2\varphi\right) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x-1)\omega} \times \sin\left(\frac{2x-1}{x}\omega t + 2\varphi\right). \end{aligned}$$

Les valeurs aux bornes de l'intervalle d'intégration sont :

$$\begin{aligned} S(0) &= -\frac{1}{4\omega} \times \sin(2\varphi) + \frac{x}{4(2x+1)\omega} \times \sin(2\varphi) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x-1)\omega} \times \sin(2\varphi) \\ &= \frac{\sin(2\varphi)}{4(4x^2-1)\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(xT) &= \frac{xT}{2} - \frac{1}{4\omega} \times \sin(2x\omega T + 2\varphi) - \frac{x}{2\omega} \times \sin(\omega T) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x+1)\omega} \times \sin[(2x+1)\omega T + 2\varphi] \\ &\quad + \frac{x}{4(2x-1)\omega} \times \sin[(2x-1)\omega T + 2\varphi]. \end{aligned}$$

Mais il faut noter que $\omega T = 2\pi$ et donc :

$$\begin{aligned} S(xT) &= \frac{xT}{2} - \frac{1}{4\omega} \times \sin(4\pi x + 2\varphi) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x+1)\omega} \times \sin(4\pi x + 2\varphi) \\ &\quad + \frac{x}{4(2x-1)\omega} \times \sin(4\pi x + 2\varphi) \\ &= \frac{xT}{2} + \frac{\sin(4\pi x + 2\varphi)}{4(4x^2-1)\omega}. \end{aligned}$$

Calculons donc maintenant (7) :

$$\begin{aligned} V^2(x, \varphi) &= \frac{1}{xT} \times \int_0^{xT} z(t) \cdot dt = \frac{S(xT) - S(0)}{xT} \\ V^2(x, \varphi) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(4\pi x + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{8\pi(4x^2-1)x}. \end{aligned} \quad (9)$$

A3. Fenêtre de Hann « avant l'élévation au carré »

Il s'agit de calculer

$$V^2(x, \varphi) = \frac{2}{3xT} \int_0^{xT} z(t) \cdot dt. \quad (13)$$

Avec

$$z(t) = \sin^2(\omega t + \varphi) \cdot [1 - \cos(\omega t/x)]^2 \quad (14)$$

soit avec $a = \omega t + \varphi$ et $b = \omega t/x$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sin^2(a) \times [1 - \cos(b)]^2 \\ &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} \times \frac{3 - 4\cos(b) + \cos(2b)}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2a) - \cos(b) + \cos(2a)\cos(b) \\ &\quad + \frac{1}{4}\cos(2b) - \frac{1}{4}\cos(2a)\cos(2b) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3\cos(2a)}{4} - \cos(b) + \frac{\cos(2a+b)}{2} + \frac{\cos(2a-b)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(2b)}{4} - \frac{\cos(2a+2b)}{4} - \frac{\cos(2a-2b)}{4}. \end{aligned}$$

Les deux termes surlignés $\cos(b) = \cos(\omega t/x)$ et $\cos(2b)/4 = \cos(2\omega t/x)/4$ ont une intégrale nulle sur l'intervalle $0 \leq t \leq xT = 2\pi x/\omega$. On peut donc les ignorer dans $z(t)$ et calculer une primitive $S(t)$ de la fonction simplifiée $z_1(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{8} [6 - 6\cos(2a) + 4\cos(2a+b) + 4\cos(2a-b) \\ &\quad - \cos(2a+2b) - \cos(2a-2b)] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3\cos(2\omega t + 2\varphi)}{4} \\ &\quad + \frac{\cos\left(\frac{2x+1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{2x-1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{2} \\ &\quad - \frac{\cos\left(2\frac{x+1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{8} - \frac{\cos\left(2\frac{x-1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{8}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{3t}{4} - \frac{3\sin(2\omega t + 2\varphi)}{8\omega} \\ &\quad + \frac{x\sin\left(\frac{2x+1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{2(2x+1)\omega} + \frac{x\sin\left(\frac{2x-1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{2(2x-1)\omega} \\ &\quad + \frac{x\sin\left(2\frac{x+1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{16(x+1)\omega} + \frac{x\sin\left(2\frac{x-1}{x}\omega t + 2\varphi\right)}{16(x-1)\omega}. \end{aligned}$$

D'où :

$$S(0) = \left[-\frac{3}{8\omega} + \frac{x}{2(2x+1)\omega} + \frac{x}{2(2x-1)\omega} - \frac{x}{16(x+1)\omega} - \frac{x}{16(x-1)\omega} \right] \times \sin(2\varphi)$$

et en notant que $\omega T = 2\pi$:

$$S(xT) = \frac{3xT}{4} + \left[-\frac{3}{8\omega} + \frac{x}{2(2x+1)\omega} + \frac{x}{2(2x-1)\omega} - \frac{x}{16(x+1)\omega} - \frac{x}{16(x-1)\omega} \right] \times \sin(4\pi x + 2\varphi).$$

Notons $\begin{cases} S(0) = A(x, \omega) \times \sin(2\varphi) \\ S(xT) = 3xT/4 + A(x, \omega) \times \sin(4\pi x + 2\varphi) \end{cases}$
avec :

$$\begin{aligned} A(x, \omega) &= -\frac{3}{8\omega} + \frac{x}{2(2x+1)\omega} + \frac{x}{2(2x-1)\omega} - \frac{x}{16(x+1)\omega} - \frac{x}{16(x-1)\omega} \\ &= -\frac{3}{8\omega} + \frac{2x^2}{(4x^2-1)\omega} - \frac{x^2}{8(x^2-1)\omega} \\ &= \frac{-3(4x^2-1)(x^2-1) + 16x^2(x^2-1) - x^2(4x^2-1)}{8(4x^2-1)(x^2-1)\omega} \\ &= \frac{-3}{8(4x^2-1)(x^2-1)\omega} = \frac{-3T}{16\pi(4x^2-1)(x^2-1)}. \end{aligned}$$

Article reçu le 5 mai 2010, version révisée reçue le 18 janvier 2011.

Avec ces éléments, calculons maintenant (13) :

$$\begin{aligned} V^2(x, \varphi) &= \frac{2}{3xT} \int_0^{xT} z(t) \cdot dt = \frac{2}{3xT} \int_0^{xT} z_1(t) \cdot dt \\ &= \frac{2[S(xT) - S(0)]}{3xT} \\ &= \frac{2}{3xT} \left[\frac{3xT}{4} - \frac{3T(\sin(4\pi x + 2\varphi) - \sin(2\varphi))}{16\pi(4x^2-1)(x^2-1)} \right] \\ V^2(x, \varphi) &= \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x + 2\varphi) \cdot \sin(2\pi x)}{4\pi(4x^2-1)(x^2-1)x}. \end{aligned}$$

Références

- [1] STENBAKKEN G.N., "A wideband sampling wattmeter", *IEEE Transactions on power apparatus and systems*, **PAS-103**, 10, 1984, 2919-2925.
- [2] LU ZU-LIANG, "An error estimate for quasi-integer-period sampling and an approach for improving its accuracy", *IEEE Transactions on Instruments and Measurements*, **IM-37**, 2, 1988, 219-222.
- [3] NYARKO D. et STROMSOE K.A., "Analysis of truncation errors in asynchronous sampling of periodic signals", *34th Midwest Symposium on circuits and systems*, **2**, 1991, 1117-1120.
- [4] HARRIS F.J., "On the use of windows for harmonic analysis with discrete Fourier transform", *Proceedings of the IEEE*, **66**, 1, 1978.
- [5] GADE S. et HERLUFSEN H., "Use of weighting functions in DFT/FFT analysis", *Brüel & Kjaer Technical review* N°3&4, 1987.