

P. ESPEL

Développement d'un wattmètre numérique à échantillonnage

Development of a digital sampling wattmeter

Patrick ESPEL

Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE), 29 Avenue Roger Hennequin, 78197 Trappes, France, patrick.espel@lne.fr.

Résumé

L'article présente le nouvel étalon du LNE pour la mesure des puissances électriques monophasées, dans la plage de fréquence 45 Hz – 65 Hz. Cette nouvelle référence primaire est un wattmètre numérique à échantillonnage dans lequel les signaux de tension et de courant sont numérisés puis traités par transformée de Fourier discrète. L'incertitude type (1σ) associée à la mesure de la puissance active (relative à la puissance apparente) est comprise entre 8 μ W/VA et 13 μ W/VA suivant la valeur du facteur de puissance.

MOTS CLÉS : MESURE DE PUISSANCE, ERREUR DE DÉPHASAGE, ÉCHANTILLONNAGE, TEMPS D'INTÉGRATION, QUANTIFICATION.

Abstract

A new power standard has been developed at the Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) to improve and update its capabilities in the field of power measurements for sinusoidal signals in the 45 Hz – 65 Hz frequency range. The power is calculated by means of the discrete Fourier transform algorithm, which is used for manipulating the quantized samples of the voltage and current signals. The standard uncertainty (1σ) of the active power (relative to the apparent power) is estimated to be between 8 and 13 parts in 10^6 depending on the power factor.

KEY WORDS: POWER MEASUREMENT, PHASE-ANGLE ERROR, DUAL-CHANNEL SAMPLING, APERTURE TIME, QUANTIZATION.

1. Introduction

Transporté, distribué et finalement vendu à des utilisateurs domestiques ou industriels, le « produit » électricité se facture en nombre de kilowatt-heures consommés ce qui impose de fait une traçabilité de la

mesure s'appuyant sur des étalons de puissance et d'énergie de haute qualité.

Un autre aspect particulièrement important est la qualité de cette énergie électrique. Il s'agit en fait de la qualité de la tension fournie par le réseau.

Depuis quelques années, les règles du jeu du secteur électrique ont évolué avec l'ouverture à la concurrence de la production d'électricité et donc la possibilité pour les consommateurs industriels d'électricité de choisir leur fournisseur. Dans ce contexte de libéralisation du marché de l'énergie, la compétitivité des compagnies d'électricité est aussi liée à la qualité de l'énergie fournie qui est devenue un facteur différenciateur. Sa garantie peut être, pour un industriel, un critère de choix d'un fournisseur d'énergie. En effet, pour les industriels, une mauvaise qualité de l'énergie électrique peut entraîner un dysfonctionnement ou même l'arrêt des outils de production. Le coût des perturbations (coupures d'électricité, creux de tension, apparition d'harmoniques sur le réseau...) peut donc être très élevé car il doit tenir compte du manque à produire, de la remise en marche de l'outil de production, des retards de livraison... Ces problèmes sont devenus d'autant plus importants que les équipements sensibles aux perturbations de la tension et/ou eux-mêmes générateurs de perturbations se sont généralisés.

Des mesures précises de la puissance et de l'énergie électriques ainsi que des perturbations permettant de caractériser la qualité de la tension s'avèrent donc indispensables pour les compagnies d'électricité et les industriels. C'est dans ce contexte que, depuis plusieurs années, les instituts nationaux de métrologie ont mis au point des bancs de mesures pour ces grandeurs. Ainsi, une

campagne de comparaisons internationales a été menée de 1996 à 1999 [1] sur la mesure de la puissance active monophasée, P , en régime sinusoïdal :

$$P = UI \cos \phi, \quad (1)$$

où U et I sont les valeurs efficaces des signaux de tension $u(t)$ et de courant $i(t)$, et ϕ représente leur déphasage (cette relation est valable pour des signaux sinusoïdaux ou présentant un taux de distorsion harmonique inférieur à 0,1 %).

Une analyse des résultats montre que les méthodes les plus performantes pour la mesure de la puissance électrique monophasée sont :

- le pont de comparaison électrothermique [2-4] ;
- les dispositifs à comparateur de courant [5,6] ;
- le wattmètre numérique à échantillonnage avec traitement numérique du signal [7-10].

Depuis quelques décennies, la convergence des progrès techniques dans les domaines des mathématiques (l'invention des algorithmes de transformée de Fourier rapide [11]), de l'électronique et la micro-électronique (par exemple, la réalisation de convertisseurs analogique-numérique de plus en plus performants) et de l'informatique (l'augmentation de la capacité de calcul des microprocesseurs) ont contribué à un essor considérable du traitement numérique des signaux. Même si le traitement analogique des signaux électriques continue à occuper une place importante dans le domaine de la métrologie, la part prise par le traitement numérique ne cesse de croître. Le développement des wattmètres numériques à échantillonnage au détriment des méthodes plus classiques (pont de comparaison électrothermique et dispositifs à comparateur de courant) en est le parfait exemple. Ces « nouveaux » wattmètres, même s'ils ne permettent pas d'obtenir une incertitude plus faible sur la mesure de la puissance active en régime sinusoïdal, présentent de nombreux avantages : précision des mesures, facilité de mise en œuvre et moindre coût. Surtout, ils donnent accès à toutes les caractéristiques des signaux de tension et de courant (amplitudes et angles de phase du fondamental et des harmoniques) et permettent donc la mesure de la puissance active en régime sinusoïdal mais également en présence d'harmoniques (régime déformé).

Au LNE, depuis la fin des années 1990, l'étalon primaire de mesure des puissances électriques (un dispositif déphaseur étalon de 20 Hz à 20 kHz) présentait des défauts de fonctionnement et ne répondait plus aux besoins exprimés par les industriels en terme d'incertitudes. Depuis, le LNE se raccorde à l'institut national de métrologie allemand (PTB) et lui sous-traite les étalonnages pour lesquels il n'est plus accrédité.

C'est dans ce contexte qu'une étude a été lancée en 2003 afin de doter le laboratoire d'une nouvelle référence primaire pour la mesure de la puissance électrique. Cette nouvelle référence est basée sur le développement d'un wattmètre numérique à échantillonnage. L'objectif est de mesurer la puissance active en régime monophasé, pour

des signaux sinusoïdaux de fréquence 53 Hz, avec une incertitude type relative à la puissance apparente inférieure à $20 \mu\text{W}/\text{VA}$ pour des signaux de tension U variant de 60 V à 240 V, des courants I variant de 0,5 A à 10 A et quelle que soit la valeur du facteur de puissance $\cos \phi$.

2. Principe du wattmètre numérique à échantillonnage

2.1. Principe

Une source de puissance délivre des signaux sinusoïdaux de tension $u(t)$ et de courant $i(t)$ sur deux circuits différents. Le principe du wattmètre numérique (fig. 1) consiste à échantillonner simultanément ces signaux, à des intervalles de temps égaux et pendant un nombre entier de périodes. Cette opération est réalisée par deux voltmètres numériques qui, pour une plus grande précision des mesures, sont utilisés sur le calibre 1 V, en mode échantillonnage par lecture de tension continue (mode DCV). Les signaux $u(t)$ et $i(t)$ sont donc mis en forme respectivement par l'intermédiaire d'un diviseur inductif de tension et d'un shunt. On obtient ainsi deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Notons qu'un transformateur d'isolement est placé dans le circuit de tension afin d'éviter le passage d'un courant continu qui pourrait entraîner la saturation des tores magnétiques du diviseur inductif.

Lors de la numérisation des signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$, on prélève N échantillons sur M périodes. Ces échantillons $x(kT_e)$ sont ensuite analysés par transformée de Fourier discrète (TFd) :

$$X(nf_0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \cdot \exp(-2\pi jnk \frac{N}{M}) \quad (2)$$

pour $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$f = nf_0 = n \frac{M}{N} f_e \text{ et } N = 2^q \text{ (avec } q \text{ entier naturel).}$$

$X(nf_0)$ notée également $X(n)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$, f_0 et f_e sont respectivement la fréquence fondamentale du signal et la fréquence d'échantillonnage et T_e est la période d'échantillonnage.

Chaque composante $X(n)$ est un nombre complexe de module $|X(n)|$ et d'angle de phase $\phi(n)$. En introduisant le coefficient $A(n)$ défini par :

$$A(0) = \text{Re}\{X(0)\},$$

$$A(n) = 2|X(n)| \text{ pour } n = 1, 2, \dots, N-1,$$

on montre que $A(n)$ et $\phi(n)$ sont égaux aux coefficients en amplitude et en phase de la représentation de la fonction $x(t)$ en série de Fourier, soit :

$$x(t) = A(0) + \sum_{n=1}^{N-1} A(n) \cos \left[2\pi n \frac{t}{T} + \phi(n) \right] \quad (3)$$

si les conditions suivantes sont respectées :

- la fonction $x(t)$ est périodique ;
- la fonction $x(t)$ ne possède pas de composantes en fréquence supérieures à $f_c/2$ (théorème de Shannon) ;
- l'échantillonnage se fait sur un nombre entier de périodes du signal.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6q \tag{4}$$

où q est le nombre de bits de quantification.

Dans notre configuration expérimentale, le codage se fait sur 18 bits. Le rapport signal sur bruit est donc de 108 dB, soit un niveau de bruit de l'ordre de 10^{-5} V à 10^{-6} V pour un signal d'amplitude 1 V. Ce calcul est donc en bon accord avec les résultats expérimentaux de la figure 2.

2.2. Montage expérimental

Le montage expérimental est composé d'abord de la source de puissance Fluke 6100A. Un transformateur d'isolement fabriqué au LNE et un diviseur inductif étalon forment la branche de tension alors que des shunts forment la branche de courant. Les deux signaux sont lus par deux multimètres de précision Agilent 3458A qui sont synchronisés par un système de boucle de réaction à verrouillage de phase. Une vue d'ensemble de ce système est présenté sur la figure 3.

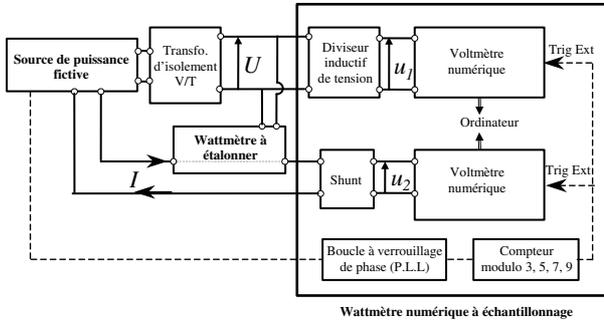


Fig. 1. – Schéma du montage.

La décomposition des fonctions $u(t)$ et $i(t)$ en série de Fourier permet la détermination des grandeurs U , I et ϕ et le calcul de la puissance active.

L'une des principales difficultés de cette méthode consiste à prélever un nombre entier de périodes des signaux de tension et de courant afin d'éviter des erreurs de troncature. Pour cela, les multimètres sont déclenchés par un signal de cadencement généré par une boucle de réaction à verrouillage de phase (PLL) qui permet de synchroniser la fréquence de la composante fondamentale du signal et la fréquence d'échantillonnage. Le spectre d'amplitude de la figure 2 montre une bonne synchronisation du système puisqu'on obtient pratiquement un pic de Dirac discret (raie) à la fréquence fondamentale du signal sinusoïdal étudié.

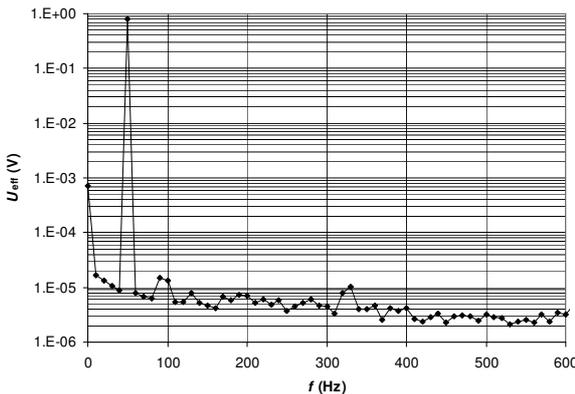


Fig. 2. – Spectre d'amplitude du signal de tension.

Le niveau de « zéro » (quelques 10^{-6}) observé pour toutes les autres fréquences est essentiellement dû au bruit de quantification. En effet, la quantification impose théoriquement un rapport signal sur bruit défini par :



Fig. 3. – Photographie du montage expérimental.

2.2.1. La source de puissance

La source de puissance (Fluke 6100A) est une source de tension double voie associée à des amplificateurs de tension et de transconductance qui permet de délivrer une tension maximale de 1 008 V (rms) et un courant maximal de 20 A, pour des fréquences comprises entre 50 Hz et 400 Hz.

Cette source de puissance « fictive » utilise un procédé de synthèse numérique et présente l'avantage d'être entièrement programmable. Elle simule les distorsions harmoniques, les sous-tensions et sur-tensions passagères et le bruit de scintillement (*flicker noise*). En régime sinusoïdal, le taux de distorsion harmonique est inférieur à 0,1 %.

2.2.2. Le transformateur d'isolement

Le transformateur d'isolement doit fonctionner jusqu'à 1 000 V au secondaire sur la plage de fréquences 45 Hz –

65 Hz et ne pas introduire sur le signal d'entrée une distorsion harmonique supérieure à 0,1 %.



Fig. 4. – Enroulement secondaire du transformateur d'isolement.

Nous avons réalisé ce transformateur en choisissant d'abord le matériau pour les tores magnétiques qui est le Nanophy1000C. Ce matériau est constitué de nanocristaux (10 nm de diamètre) incrustés dans un alliage doux amorphe (épaisseur de bande 20 μm), il présente de très bonnes caractéristiques comparées aux alliages magnétiques usuels. Son induction à saturation est de 1,25 T et nous avons choisi une perméabilité relative de l'ordre de $7 \cdot 10^4$. Compte tenu des contraintes imposées, le noyau magnétique est réalisé par un empilement de trois tores de dimensions : 207 mm X 103 mm X 56 mm.

Le transformateur construit (fig. 4) est un transformateur d'isolement élévateur de tension. Les rapports de transformation varie de 0,7 à 8,4 par pas de 0,7. La tension maximale admissible à son entrée est de 120 V à 65 Hz. Dans ces conditions, la tension maximale de sortie est d'environ 1 000 V et le taux de distorsion harmonique mesuré est inférieur à 0,05 %.

2.2.3. Le diviseur inductif de tension

Le diviseur inductif de tension (fig. 5) a été fabriqué au NMIA (*National Measurement Institute of Australia*).

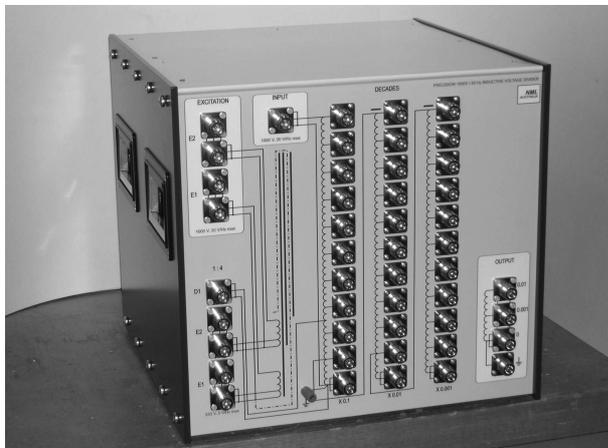


Fig. 5. – Le diviseur inductif de tension.

Ses principales caractéristiques sont les suivantes :

- le diviseur fonctionne sur la plage de fréquences 50 Hz – 1 kHz. Sa tension maximale est de 1 000 V et le rapport de transformation k varie de 1000:1 à 100:1 ;
- il n'introduit pas de distorsion harmonique significative sur le signal.

2.2.4. Les shunts

Les *shunts* (fig. 6) dont le courant nominal s'échelonne entre 0,1 A et 10 A ont été construits à l'institut SP (*Swedish National Testing and Research Institute*) en Suède.



Fig. 6. – Shunt 5 A.

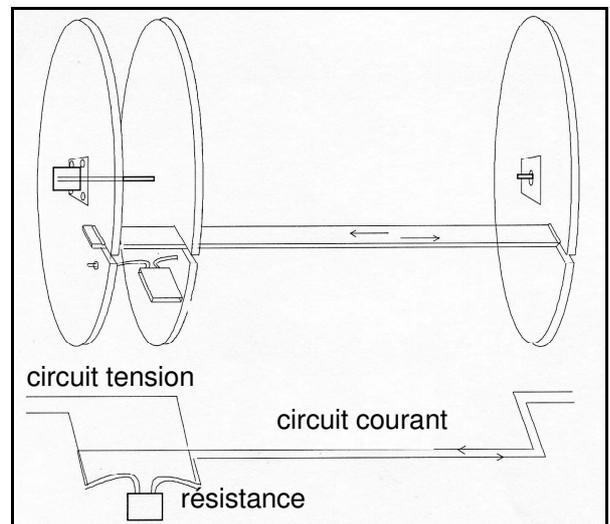


Fig. 7. – Schéma de principe des *shunts*.

Le schéma de principe est représenté sur la figure 7. Le courant principal, I , pénètre par le disque de droite. Son intensité est divisée par le nombre n d'« ailettes » qui confèrent à l'ensemble une structure tubulaire et assurent le raccordement au circuit de mesure (circuit de tension). Un courant d'intensité I/n circule donc sur l'une des faces des ailettes, traverse les résistances et revient par l'autre face. La géométrie du *shunt* permet ainsi de minimiser le

couplage inductif, principale source de déphasage entre le courant qui traverse le *shunt* et la tension à ses bornes.

2.2.5. Les multimètres

Notre choix s'est porté sur les multimètres de type 3458. Ces multimètres peuvent numériser des signaux en effectuant des mesures de tension continue (mode DCV), par échantillonnage direct ou sous-échantillonnage. Compte tenu des fréquences considérées (de 45 Hz à 65 Hz) et des précisions recherchées, nous avons opté pour la première méthode.

La numérisation est donc effectuée en spécifiant des mesures de tension continue et en fixant un temps d'intégration T_a (ou temps de conversion analogique-numérique) qui correspond au temps pendant lequel le multimètre échantillonne le signal d'entrée. Le mode DCV permet la numérisation du signal à une fréquence allant de 0,2 mesure/s avec une résolution de 28 bits, à $100 \cdot 10^3$ mesures/s avec une résolution de 16 bits. Le temps d'intégration varie de 500 ns à 1 s avec un pas de 100 ns. La plage de tension varie de 100 mV à 1 000 V. La bande passante est limitée à 150 kHz pour les calibres inférieurs à 10 V et à 30 kHz pour les calibres supérieurs. Les avantages de cette méthode de numérisation par rapport à celle de l'échantillonnage direct résident dans un temps d'intégration programmable, une résolution plus élevée et une vitesse d'échantillonnage maximale de 100 000 échantillons par seconde (contre 50 000 pour l'échantillonnage direct). Les inconvénients sont une plus grande instabilité des déclenchements et une largeur de bande de 150 kHz maximum (contre 12 MHz pour la méthode d'échantillonnage direct ou de sous-échantillonnage).

2.2.6. Le système de synchronisation

Nous utilisons la (PLL) interne de la source de puissance. Cette PLL présente quelques inconvénients. Notamment, pour une fréquence de signal donnée, elle impose la fréquence d'échantillonnage en prélevant N points sur une période ($M = 1$) sans que l'on puisse choisir les valeurs de N et de M . Ainsi, à 53 Hz, elle génère un signal de cadencement de 54,272 kHz. La valeur maximale du temps d'intégration admise par le multimètre est alors limitée à 8 μ s. Une meilleure stabilité et une meilleure précision des mesures peuvent être obtenues en augmentant ce temps d'intégration. Pour cela, nous avons construit un diviseur de fréquence qui permet de diviser la fréquence d'échantillonnage par 3, 5, 7 ou 9 et ainsi augmenter le temps d'intégration accepté par le multimètre. D'autre part, diviser par un nombre impair permet d'obtenir un rapport N/M non entier (puisque $N = 2^n$) ce qui permet d'avoir des échantillons différents (décalés) d'une période à l'autre et ainsi obtenir une meilleure représentation du signal pour des signaux périodiques.

2.2.7. Automatisation du dispositif expérimental

Les différents instruments (source de puissance, wattmètre et multimètres) sont pilotés via des cartes IEEE.

Un programme a été développé sous Labview pour configurer les multimètres en mode DCV, traiter les échantillons de tension et de courant par TFd et calculer les valeurs efficaces de la tension U et du courant I , le déphasage ϕ et donc la puissance active P .

3. Sources d'erreurs et incertitudes associées

Les signaux $u(t)$ et $i(t)$ sont mis en forme respectivement par un diviseur inductif de tension et un shunt de courant puis numérisés par deux multimètres. Ces différents éléments introduisent des erreurs en phase et en quadrature sur la mesure de la puissance.

En appliquant la loi de propagation des incertitudes à la relation (1), on obtient une expression qui fait apparaître des termes d'incertitudes en phase et en quadrature :

$$\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}_{\text{Incertitudes en phase}} + \underbrace{\tan^2 \phi \cdot \sigma_\phi^2}_{\text{Incertitudes en quadrature}} \quad (5)$$

Les termes d'incertitudes en quadrature ont une contribution nulle sur le bilan global pour $\phi = 0^\circ$ et une contribution qui tend vers l'infini lorsque ϕ tend vers 90° . L'incertitude relative s'exprimera donc toujours en fonction de la puissance apparente $S = UI$ sous la forme :

$$\left(\frac{\sigma_P}{S}\right)^2 = \left[\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 \right] \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cdot \sigma_\phi^2 \quad (6)$$

Décomposons les différents éléments de cette relation :

- la tension U est ramenée, par l'intermédiaire d'un diviseur inductif de rapport k , à un niveau de tension u_1 mesurable sur le calibre 1 V :

$$U = k \cdot u_1 \quad (7)$$

Le terme $\frac{\sigma_U}{U}$ s'écrit alors :

$$\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{u_1}}{u_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 \quad (8)$$

- le courant I est mesuré par l'intermédiaire d'un shunt d'impédance Z :

$$I = \frac{u_2}{|Z|} \text{ avec } |Z| = \frac{R}{(1 + \delta)}, \quad (9)$$

où $|Z|$ est le module de l'impédance du shunt, R est la valeur de sa résistance en continu et δ , son écart de transposition.

Le terme $\frac{\sigma_I}{I}$ s'écrit alors :

$$\left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 = \left[\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\delta}{1 + \delta}\right)^2 \right] + \left(\frac{\sigma_{u_2}}{u_2}\right)^2 \quad (10)$$

- dans les expressions (8) et (10), les tensions u_1 et u_2 sont les tensions mesurées par les multimètres utilisés en mode DCV. Elles sont affectées par des erreurs dues à la limitation de bande passante des multimètres ϵ_{BP} , au temps d'intégration des convertisseurs ϵ_{Ta} , à la quantification des signaux ϵ_Q et au *jitter* d'échantillonnage ϵ_j :

$$u_{1,2} = u_{DCV} (1 + \epsilon_{BP} + \epsilon_{Ta} + \epsilon_Q + \epsilon_j) \quad (11)$$

Les termes $\frac{\sigma_{U_1}}{U_1}$ et $\frac{\sigma_{U_2}}{U_2}$ s'écrivent alors :

$$\left(\frac{\sigma_{u_{1,2}}}{u_{1,2}} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{u_{DCV}}}{u_{DCV}} \right)^2 + \frac{\sigma_{BP}^2 + \sigma_{Ta}^2 + \sigma_Q^2 + \sigma_j^2}{(1 + \epsilon_{BP} + \epsilon_{Ta} + \epsilon_Q + \epsilon_j)^2} \quad (12)$$

- enfin, le dernier paramètre à analyser est le déphasage ϕ entre la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$. Les différentes sources de déphasage sont le diviseur inductif ϕ_{IVD} , le shunt ϕ_{shunt} et les multimètres pour lesquels on distingue le déphasage dû à leur différence de bande passante ϕ_{BP} , à leur différence de temps d'intégration ϕ_{Ta} , au retard de déclenchement ϕ_r , au *jitter* d'échantillonnage ϕ_j et à la quantification des signaux ϕ_Q (13) :

$$\phi = \phi_o + \phi_{IVD} + \phi_{shunt} + (\phi_{BP} + \phi_{Ta} + \phi_r + \phi_j) + \phi_Q$$

Le terme σ_ϕ s'écrit alors (14):

$$\sigma_\phi^2 = \sigma_{\phi_o}^2 + \sigma_{\phi_{IVD}}^2 + \sigma_{\phi_{shunt}}^2 + (\sigma_{\phi_{BP}}^2 + \sigma_{\phi_{Ta}}^2 + \sigma_{\phi_r}^2 + \sigma_{\phi_j}^2) + \sigma_{\phi_Q}^2$$

Tous les termes d'erreurs et leurs incertitudes associées ont été évalués expérimentalement et/ou par le calcul et sont présentés dans les paragraphes suivants.

3.1. Le diviseur inductif de tension

Le diviseur inductif de tension a été étalonné au NMIA. A 53 Hz et pour $k = 200$, les incertitudes relatives (1σ) sur le rapport de transformation et sur la phase sont :

$$\sigma_k = \pm 1,2 \cdot 10^{-8} k,$$

$$\sigma_{\phi_{IVD}} = 0,05 \mu\text{rad}.$$

3.2. Les shunts

Les *shunts* ont été étalonnés à l'institut SP. Trois paramètres permettent de les caractériser : la mesure de leur résistance R en régime continu, leur écart de transposition δ , ou différence relative entre la valeur du module de l'impédance en régime alternatif et la valeur de sa résistance en régime continu, et enfin leur déphasage ϕ_{shunt} dû à l'existence de composantes réactives.

A 53 Hz et pour le *shunt* 5 A, ces valeurs sont :

$$R = 160,0158 \times (1 \pm 1 \cdot 10^{-6}) \text{ m}\Omega$$

$$\delta = -1 \pm 10 \mu\text{A/A}$$

$$\phi_{shunt} = 0,5 \pm 0,6 \mu\text{rad}$$

(l'incertitude est donnée en 1σ)

3.3. Les multimètres et le système de synchronisation

3.3.1. Erreurs en phase introduites par l'utilisation de deux multimètres

Les différentes sources d'erreurs en phase sont les suivantes :

- Erreur DC des multimètres : lorsque le multimètre est utilisé en mode DCV, l'incertitude-type relative associée à la mesure de la tension est égale à $3 \cdot 10^{-6}$;
- Erreur liée à la limitation de bande passante des multimètres : lorsque les deux multimètres sont utilisés sur le calibre 1 V, leur bande passante est limitée à 150 kHz. Cette limitation introduit une erreur sur la mesure de l'amplitude des signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$. En modélisant la bande passante par un filtre passe-bas du premier ordre, l'erreur, ϵ_{BP} , s'écrit sous la forme :

$$\epsilon_{BP} = \left(\frac{\sigma_{u_1}}{u_1} \right)_{BP} = \left(\frac{\sigma_{u_2}}{u_2} \right)_{BP} \approx -\frac{f_0^2}{45 \times 10^9} \quad (15)$$

Aux fréquences considérées ($45 \text{ Hz} < f_0 < 65 \text{ Hz}$), elle est de l'ordre de quelques 10^{-8} et son incertitude type associée est négligeable ;

- Erreur liée au temps d'intégration : en pratique, l'opération d'échantillonnage n'est pas réalisée avec une impulsion infiniment brève. Le multimètre établit une moyenne sur le signal d'entrée pendant une durée T_a qui correspond au temps d'intégration. Le module du spectre est donc filtré par le sinus cardinal de $(\pi f_0 T_a)$ et l'erreur relative résultante ϵ_{Ta} sur la mesure de la tension efficace est alors définie par :

$$\epsilon_{Ta} = \left(\frac{\sigma_{u_1}}{u_1} \right)_{Ta} = \left(\frac{\sigma_{u_2}}{u_2} \right)_{Ta} \approx -\frac{\pi^2}{6} (f_0 T_a)^2 \quad (16)$$

A 53 Hz, pour $T_a = 40 \mu\text{s}$, cette erreur vaut $7,4 \cdot 10^{-6}$ et son incertitude-type associée est inférieure à 10^{-7} .

3.3.2. Erreurs en quadrature introduites par l'utilisation de deux multimètres

Les différentes sources de déphasage sont les suivantes :

- les deux multimètres n'ont pas exactement les mêmes bandes passantes f_u et f_i (même lorsqu'ils sont utilisés sur le même calibre). Le déphasage ϕ_{BP} qui en résulte est calculé en modélisant les bandes passantes par un filtre passe-bas du premier ordre :

$$\phi_{BP} \approx \frac{f_0}{f_u} - \frac{f_0}{f_i} \quad \text{pour } f_0 \ll f_w, f_i. \quad (17)$$

- l'intervalle de temps Δt_r entre l'événement de déclenchement et le premier événement d'échantillonnage diffère d'un multimètre à l'autre, ce qui introduit un déphasage ϕ_r :

$$\phi_r = 2\pi \cdot f_0 \cdot \Delta t_r \quad (18)$$

- l'utilisation d'un temps d'intégration non nul introduit un terme de déphasage sous la forme $\exp\left(-2\pi j f_0 \frac{T_a}{2}\right)$. Cela signifie que l'angle de phase d'un signal est déphasé de $\pi f_0 T_a$. Le déphasage entre deux signaux s'écrit donc :

$$\phi_{Ta} = (\pi f_0 T_a)_U - (\pi f_0 T_a)_I \quad (19)$$

- le « jitter d'échantillonnage », c'est-à-dire la fluctuation de la position d'une (ou de plusieurs) impulsion(s) dans le train d'impulsions qui définit la période d'échantillonnage, introduit également un déphasage ϕ_j .

Le déphasage résultant de l'utilisation de deux multimètres s'écrit donc :

$$\Delta\phi = \phi_{BP} + \phi_r + \phi_{Ta} + \phi_j \quad (20)$$

Ce déphasage a été déterminé expérimentalement en numérisant simultanément un signal sinusoïdal, de la forme :

$$u(t) = U \sin(2\pi f_0 t + \phi) , \quad (21)$$

au moyen de deux multimètres utilisés en mode échantillonnage par lecture de tension continue. Une boucle de réaction à verrouillage de phase génère un signal de cadencement en phase avec le signal $u(t)$ et permet d'échantillonner uniquement un nombre entier de périodes. Ce signal de cadencement est appliqué simultanément sur les voies de déclenchement extérieures des multimètres. Un traitement par TFD des échantillons obtenus permet la détermination des amplitudes U_1 et U_2 et des angles de phase ϕ_1 et ϕ_2 des signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ mesurés par chaque multimètre :

$$u_1(t) = U_1 \sin(2\pi f_0 t + \phi_1)$$

$$u_2(t) = U_2 \sin(2\pi f_0 t + \phi_2)$$

Soit $\Delta\phi$ la différence d'angle de phase entre les signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Si les caractéristiques des deux multimètres sont rigoureusement identiques, $\Delta\phi$ est alors nul. Dans le cas contraire, la différence d'angle de phase est l'erreur de déphasage introduite par les deux multimètres.

Prenons par exemple, $U = 0,8$ V, $\phi = 0$ et f_0 variable. Les deux multimètres sont utilisés sur le calibre 1 V. Lors de l'opération de numérisation, N échantillons sont prélevés sur 5 périodes du signal de façon à ce que la fréquence d'échantillonnage f_c reste constante quelle que soit la valeur de f_0 . Le temps d'intégration est égal dans ce cas à 20 μ s.

Les résultats sont présentés sur la figure 8. A 53 Hz, l'erreur de déphasage $\Delta\phi$ est de $3,8 \pm 0,2$ μ rad. Cette erreur augmente linéairement avec la fréquence du signal sinusoïdal étudié. La modification de la fréquence d'échantillonnage (tout en respectant le théorème de Shannon) ne change pas la valeur de $\Delta\phi$.

Les différentes sources d'erreurs de déphasage sont incluses dans la valeur de $\Delta\phi$ et ne peuvent pas être dissociées par cette mesure.

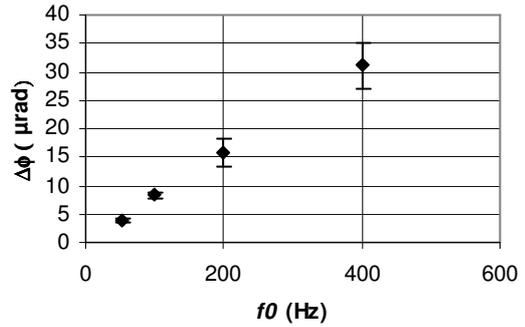


Fig. 8. – Erreur de déphasage en fonction de la fréquence du signal.

Des essais complémentaires ont été réalisés en utilisant un multimètre sur le calibre 1 V et l'autre respectivement sur les calibres 1 V, 10 V, 100 V et 1 000 V (fig. 9). Lorsque le multimètre numérise un signal en mode DCV, les calibres 1 V et 10 V ont une bande passante maximale de 150 kHz et les calibres 100 V et 1 000 V ont une bande passante maximale de 30 kHz. En utilisant par exemple un multimètre sur le calibre 1 V et l'autre sur le calibre 100 V, on peut calculer (tab. 1) l'erreur de déphasage résultante ϕ_{BP} (Equ. 17).

Le bon accord entre les résultats expérimentaux et le calcul montre que l'erreur de déphasage qui apparaît lorsque les multimètres sont utilisés sur les calibres 1 V – 100 V ou 1 V – 1 000 V est essentiellement due à leur différence de bande passante.

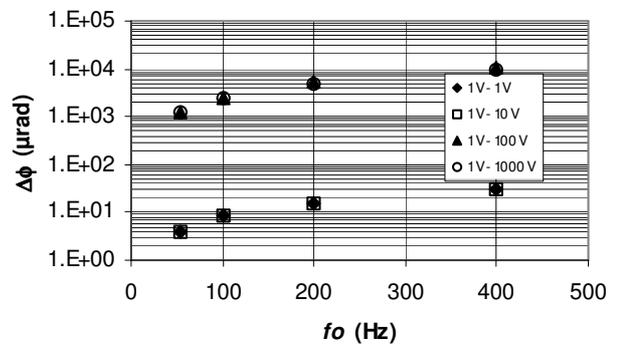


Fig. 9. – Erreur de déphasage $\Delta\phi$ en fonction de la fréquence du signal et du calibre des voltmètres.

Tableau 1

$\phi_{BP} = g(f_0)$ pour les calibres 1 V – 100 V.

f_0 (Hz)	53	100	200	400
ϕ_{BP} (μ rad)	1413	2666	5333	10666

Etudions maintenant l'influence du temps d'intégration T_a . Les conditions expérimentales sont les mêmes à l'exception du temps d'intégration T_a qui prend des valeurs différentes, comprises entre 3 μ s et 50 μ s (la valeur de T_a est identique sur les deux multimètres). Les résultats (fig. 10) montrent que l'erreur de déphasage $\Delta\phi$ ne dépend pas du temps d'intégration. Par contre, l'écart type associé diminue lorsque T_a augmente avant de se stabiliser au-delà de 20 μ s.

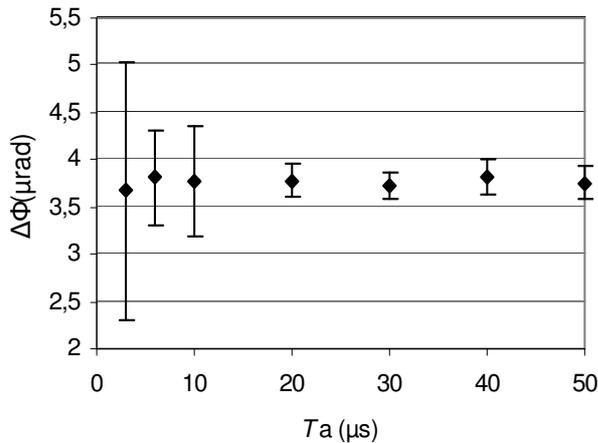


Fig. 10. – Erreur de déphasage $\Delta\phi$ en fonction du temps d'intégration T_a (la barre d'erreur représente l'écart type).

On fait maintenant varier la valeur du temps d'intégration sur un multimètre tout en la maintenant constante sur l'autre. Les résultats, présentés dans le tableau 2, montrent un bon accord entre l'analyse théorique (équ. 19) et l'expérience. On peut donc calculer l'erreur de déphasage qui résulte de l'utilisation des deux multimètres avec un temps d'intégration identique, par exemple 20 μ s. Sachant que la précision de la base de temps est de 0,01 % en mode DCV, cette erreur est inférieure à 0,3 μ rad.

Tableau 2

Erreur de déphasage lorsque les multimètres ont des temps d'intégration différents : comparaison théorie/expérience.

T_{a1} (μ s)	T_{a2} (μ s)	ϕ_{T_a} (μ rad) Expérience	ϕ_{T_a} (μ rad) Théorie
20	20,1	16,7	16,6
20	21	166,3	166,5
20	30	1 665,1	1 665,0

3.3.3. Erreur de quantification

Lors de la phase de quantification, il y a dégradation de l'information. En effet, le signal quantifié a subi une distorsion harmonique, du fait de la non-linéarité de la fonction de transfert du quantificateur (c'est une fonction en marche d'escalier). On peut donc considérer que le

signal quantifié s_q est la somme d'un signal analogique s et d'un bruit de quantification b :

$$s_q(m) = s(m) + b(m), \text{ pour le } m^{\text{e}} \text{ point.}$$

Lors de la quantification des signaux suivie d'un traitement des échantillons par TFD, les écarts types associés aux mesures de la valeur efficace et de l'angle de phase s'écrivent sous la forme [12] :

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{\Delta^2}{6N}} \tag{22}$$

$$\sigma_{\phi_Q} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{6N} \left(\frac{1}{U_1^2} + \frac{1}{U_2^2} \right)}, \tag{23}$$

où Δ est le pas de quantification.

L'incertitude liée à la quantification des signaux est inférieure à $1 \cdot 10^{-6}$ dans les conditions d'utilisation du wattmètre numérique à échantillonnage ($n = 18$ bits, $N = 1\,024$).

3.4. Bilan d'incertitudes

Les erreurs introduites par les différents éléments du banc de mesure ont été déterminées expérimentalement et/ou calculées. En prenant en compte toutes les contributions (tab. 3), l'incertitude type associée à la mesure de la puissance active et relative à la puissance apparente est comprise entre 8 μ W/VA et 13 μ W/VA à 120 V, 5 A, 53 Hz pour les différents facteurs de puissance : 1, 0,5 i/c, 0,001 i/c où i/c (comportements inductif/capacitif) signifie que le courant est en retard/avance sur la tension.

4. Mesure de la puissance active

Les mesures de la puissance active ont été réalisées, à 53 Hz, en appliquant simultanément les signaux de tension et de courant sur le wattmètre numérique à échantillonnage et un wattmètre commercial. Ce dernier avait été préalablement étalonné à la PTB avec une incertitude type (relative à la puissance apparente) de $\pm 30 \cdot 10^{-6}$ à 53 Hz, pour des tensions comprises entre 60 V et 480 V, des courants variant de 50 mA à 10 A et quel que soit le facteur de puissance.

Les grandeurs comparées sont les erreurs relatives ϵ_1 et ϵ_2 définies par :

$$\epsilon_1 = \frac{P_{com} - P_{PTB}}{UI} \text{ et } \epsilon_2 = \frac{P_{com} - P_{DSWM}}{UI} \tag{24}$$

où P_{com} , P_{PTB} et P_{DSWM} sont les puissances actives mesurées respectivement par le wattmètre commercial, le wattmètre étalon de la PTB et le wattmètre numérique.

Les mesures ont été effectuées pour différents niveaux de tension U ($60 \text{ V} < U < 240 \text{ V}$) et de courant I ($0,05 \text{ A} < I < 10 \text{ A}$). Tous les résultats sont présentés sur les figures 11, 12, 13 et dans le tableau 4. Il apparaît que, quelles que soient les conditions expérimentales, la différence $\epsilon_2 - \epsilon_1$ est toujours inférieure à l'incertitude de mesure.

Tableau 3
Composantes d'incertitudes.

Composantes d'incertitudes	Incetitude type relative		
	cos ϕ		
	1	0,5	0,001
Incetitude type A			
Répétabilité des mesures	7	7	7
Incetitude type B			
En phase			
<u>Rapport de division IVD</u>	0,012	0,006	< 0,001
<u>Impédance du shunt</u>			
Résistance en continu	1	0,5	0,001
Ecart de transposition	10	5	0,01
<u>Voltmètres numériques</u>			
Mode DCV – 1	3	1,5	0,003
Mode DCV – 2	3	1,5	0,003
Bande passante – 1	<0,001	<0,001	<0,001
Bande passante – 2	<0,001	<0,001	<0,001
Temps d'intégration $T_a - 1$	<0,001	<0,001	<0,001
Temps d'intégration $T_a - 2$	<0,001	<0,001	<0,001
Quantification des signaux	0,14	0,07	<0,001
En quadrature			
<u>Déphasage IVD</u>	0	0,044	0,05
<u>Déphasage shunt</u>	0	0,53	0,6
<u>Déphasage des voltmètres numériques</u>			
Limitation bande passante			
Temps d'intégration T_a			
Retard de déclenchement			
Jitter d'échantillonnage	0	0,18	0,2
Bruit de quantification	0	0,18	0,2
Incetitude type composée	13	9	7
Incetitude élargie ($k = 2$)	26	18	14

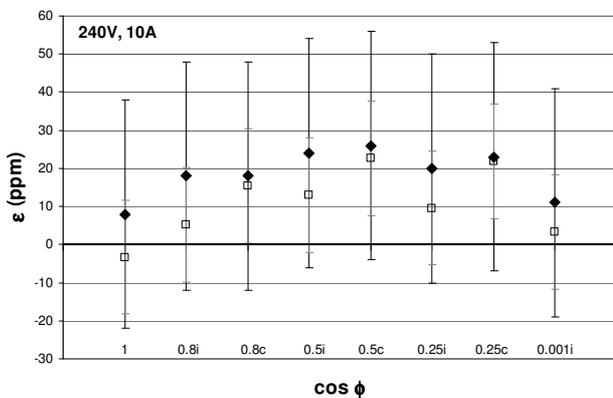


Fig. 11. – Erreurs relatives ϵ_1 (◆) et ϵ_2 (□) en fonction du facteur de puissance pour $U = 240$ V et $I = 10$ A.

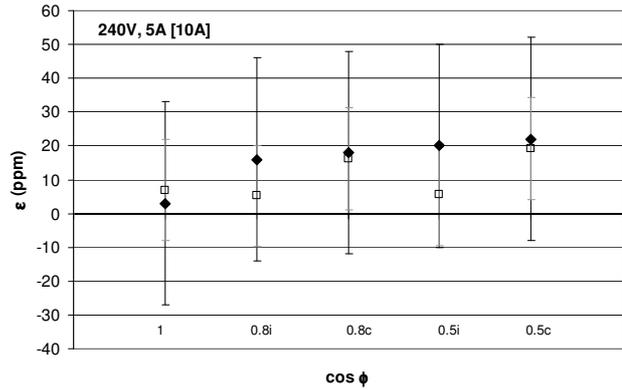


Fig. 12. – Erreurs relatives ϵ_1 (◆) et ϵ_2 (□) en fonction du facteur de puissance pour $U = 240$ V et $I = 5$ A (le wattmètre commercial est utilisé sur la calibre 10 A).

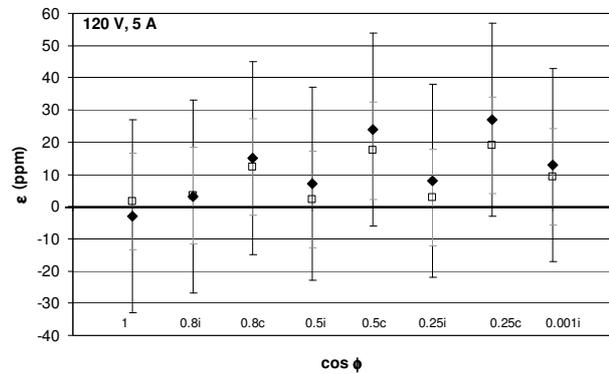


Fig. 13. – Erreurs relatives ϵ_1 (◆) et ϵ_2 (□) en fonction du facteur de puissance pour $U = 120$ V et $I = 5$ A.

Tableau 4
Mesure de la puissance active.

U (V)	I (A)	cos ϕ	$\epsilon_1 - \epsilon_2$
	0,1		7
	0,25		2
	0,5		5
	1		-2
	2,5		4
	5		0
	10		-9
60			3
60			1
120			3
120			2
240			5
240	0,05	0,8 i	7
240	0,1	0,8 i	9
240	0,25	0,8 i	3
240	0,5	0,8 i	2
240	1	0,8 i	2
240	2,5	0,8 i	1
240	10	0,8 i	-9
240	10	1	-10
240	10	0,8 i	-13
240	10	0,8 c	-3
240	10	0,5 i	-11
240	10	0,5 c	-3
240	10	0,25 i	-10
240	10	0,25 c	-1
240	10	0,001 i	-8

5. Conclusion

Un nouvel étalon primaire de mesure des puissances électriques a été développé au LNE. Cet étalon, basé sur la numérisation des signaux de tension ($60\text{ V} < U < 240\text{ V}$) et de courant ($0,5\text{ A} < I < 10\text{ A}$), permet de mesurer la puissance active à 53 Hz, en régime sinusoïdal ou pour des signaux présentant un taux de distorsion harmonique inférieur à 0,1 %, avec une incertitude-type relative à la puissance apparente comprise entre $8\text{ }\mu\text{W/VA}$ et $13\text{ }\mu\text{W/VA}$.

Pour valider le bon fonctionnement de cet étalon, nous avons participé à la comparaison internationale CCEM-K5 "Comparison of AC power at 50 Hz". Les mesures réalisées à 53 Hz, 120 V, 5 A et pour $\cos \phi = 1, 0,5$ i/c et 0,01 i/c sont actuellement en cours d'analyse.

Références

- [1] "An International Comparison of 50/60 Hz Power (1996-1999)", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **50**, n° 2, 2001.
- [2] SHAPIRO E. Z., PARK Y. T., BUDOVSKY I. F. et GIBBES A. M., "A new power transfer, its investigation and intercomparison", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **46**, 1997, 412-415.
- [3] ZHANG D., JIA Y., ZHANG G., ZHANG Y. et GUO F., "A new power standard for audio frequency measurements", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **39**, 1990, 545-547.
- [4] SHAPIRO E. Z. et BUDOVSKY I. F., "Thermal watt-transfer standard", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **44**, 1995, 399-402.
- [5] OLDHAM N. et PETERSONS O., "Calibration of standard wattmeters using a capacitance bridge and a digital generator", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **34**, 1985, 521-524.
- [6] MOORE W. J. W. et SO E., "A current comparator based system for calibrating active/reactive power and energy meters", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **32**, 1983, 147-149.
- [7] CLARK F. J. J. et STOCKTON J. R., "Principles and theory of wattmeters operating on basis of regularly spaced sample pairs", *J. Phys. E. Sci. Instrum.*, **15**, 1982, 645-652.
- [8] SVENSSON S., "A precision wattmeter for non-sinusoidal conditions", Technical Report n° 223L, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- [9] SVENSSON S., "A wattmeter standard for the audio frequency range", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **48**, 1999, 431-433.
- [10] RAMM G., MOSER H. et BRAUN A., "A new scheme for generating and measuring active, reactive, and apparent power at power frequencies with uncertainties of $2.5 \cdot 10^{-6}$ ", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **48**, 1999, 422-426.
- [11] COOLEY J.W. et TUKEY J.W., "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Math. Comp.*, **19**, 1965, 297-301.
- [12] WAGDY M.F., "Effect of ADC quantization errors on some periodic signal measurements", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **36**, 1987, 983-989.